

L'Effet Hall Quantique

Mardi 31 mai 2011

Physique de la matière condensée
et des nano-objets

Pierre Albertini et Mathilde Hodin



1. L'Effet Hall quantique classique

Edwin Herbert Hall

*Un courant électrique
traversant un matériau
baignant dans un champ B ,
engendre une tension
perpendiculaire à ceux-ci.*

On a New Action of the Magnet on Electric Currents.

BY E. H. HALL, *Fellow of the Johns Hopkins University.*

SOMETIME during the last University year, while I was reading Maxwell's Electricity and Magnetism in connection with Professor Rowland's lectures, my attention was particularly attracted by the following passage in Vol. II, p. 144:

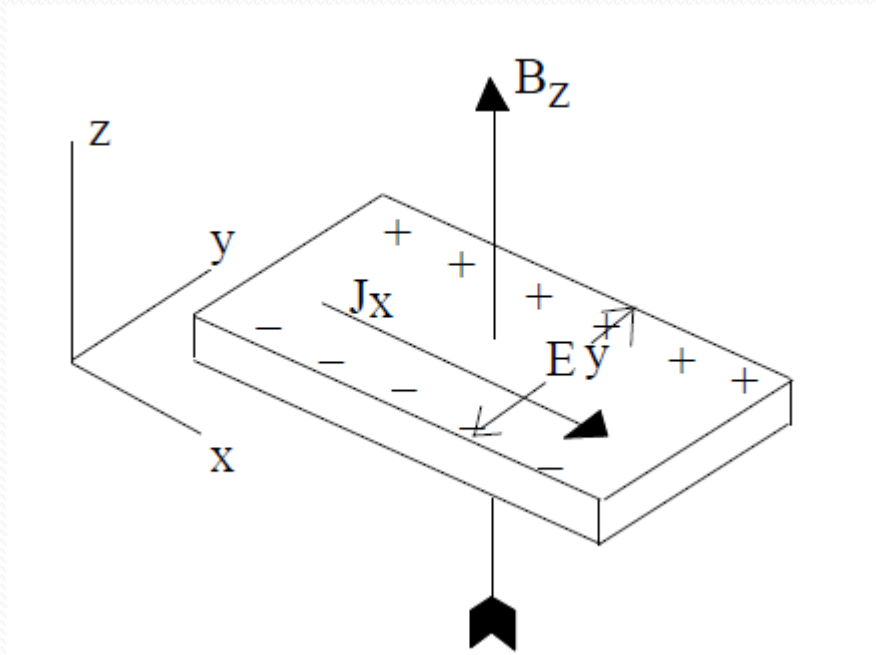
"It must be carefully remembered, that the mechanical force which urges a conductor carrying a current across the lines of magnetic force, acts, not on the electric current, but on the conductor which carries it. If the conductor be a rotating disk or a fluid it will move in obedience to this force, and this motion may or may not be accompanied with a change of position of the electric current which it carries. But if the current itself be free to choose any path through a fixed solid conductor or a network of wires, then, when a constant magnetic force is made to act on the system, the path of the current through the conductors is not permanently altered, but after certain transient phenomena, called induction currents, have subsided, the distribution of the current will be found to be the same as if no magnetic force were in action. The only force which acts on electric currents is electromotive force, which must be distinguished from the mechanical force which is the subject of this chapter."

This statement seemed to me to be contrary to the most natural supposition in the case considered, taking into account the fact that a wire not bearing a current is in general not affected by a magnet and that a wire bearing a current is affected exactly in proportion to the strength of the current, while the size and, in general, the material of the wire are matters of indifference. Moreover in explaining the phenomena of statical electricity it is customary to say that charged bodies are attracted toward each other or the contrary solely by the attraction or repulsion of the charges for each other.

Soon after reading the above statement in Maxwell I read an article by Prof. Edlund, entitled "*Unipolar Induction*" (Phil. Mag., Oct., 1878, or Annales de Chemie et de Physique, Jan., 1879), in which the author evi-

257

Principe de l'effet Hall classique



$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



$$E_H = v B$$



$$R_H = \frac{E_y}{J_x} = \frac{B}{nq}$$

Applications

- Mesure de champs magnétiques (teslamètre)
- Mesure d'intensité de courants (capteurs de courants à effet Hall)
- Capteurs de position
- Remplacement des contacteurs électriques
- etc

Effet Hall quantique

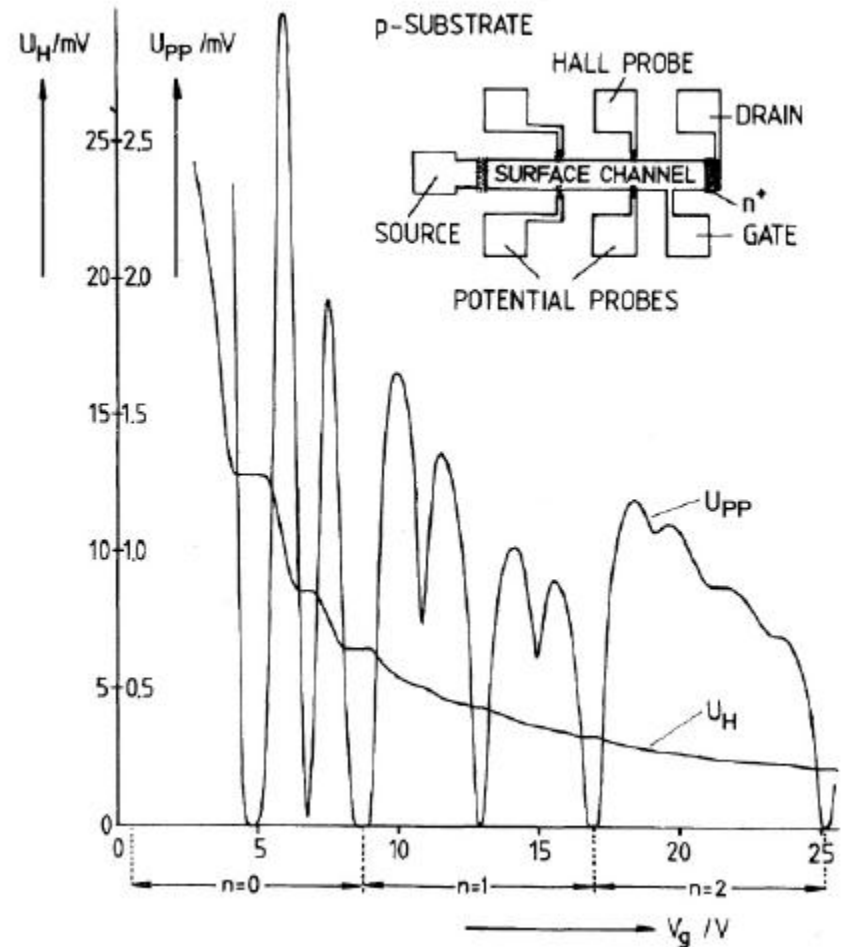
L'expérience

- Echantillon de Si-MOSFET contenant un gaz d'électron, sous champ magnétique
- Mesure simultanée de résistance longitudinale R_L et de résistance de Hall R_H à n variable et B constant

Effet Hall quantique

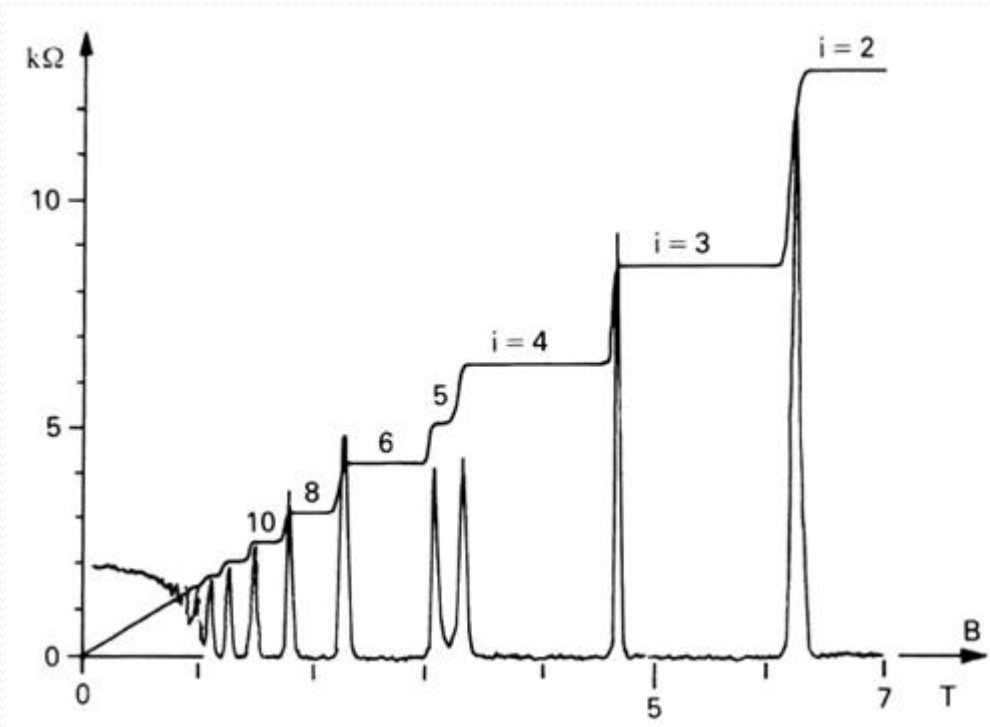
L'expérience

- Baisse de la température
- > oscillations de Shubnikov-de Haas
- Plateau et oscillations a V_s .
- $1/n$ et constante



Introduction à l'EHQ

Dans un semi conducteur, à basse température



-Indépendant de l'échantillon

-En unités de h/e^2 divisé par un entier

Échantillon de GaAs-GaAlAs à 30 mK

- 1980, von Klitzing
- Prix Nobel 1985 (puis 1998)
- Grande reproductibilité des valeurs expérimentales des plateaux (10^{-9}) -> Bureau International des Poids et Mesures

1. Effet Hall Quantique Classique

■ Représentation de l'ohm au moyen de l'effet Hall quantique (PV, 56, 20 et *Metrologia*, 1989, 26, 70)

Recommandation 2

Le Comité international des poids et mesures,

agissant conformément aux instructions données dans la Résolution 6 de la 18^e Conférence générale des poids et mesures concernant l'ajustement prévu des représentations du volt et de l'ohm,

considérant

- que la plupart des étalons actuels de référence de résistance électrique présentent au cours du temps des variations significatives,
- qu'un étalon de référence de résistance électrique fondé sur l'effet Hall quantique serait stable et reproductible,
- qu'une étude approfondie des résultats des déterminations les plus récentes conduit à une valeur de $25\,812,807\ \Omega$ pour la constante de von Klitzing, R_K , c'est-à-dire pour le quotient de la tension de Hall par le courant correspondant au plateau de rang $i=1$ dans l'effet Hall quantique,
- que l'effet Hall quantique, avec cette valeur de R_K , peut être utilisé pour établir un étalon de référence de résistance dont l'incertitude (écart-type), par rapport à l'ohm, est estimée 2×10^{-7} en valeur relative et dont la reproductibilité est nettement meilleure,

recommande

- que l'on adopte par convention, pour la constante de von Klitzing, R_K , la valeur $R_{K,90} = 25\,812,807\ \Omega$ exactement,
- que cette valeur soit utilisée à partir du 1^{er} janvier 1990, et non auparavant, par tous les laboratoires qui fondent sur l'effet Hall quantique leurs mesures de résistance électrique,
- qu'à partir de cette même date tous les autres laboratoires ajustent la valeur de leurs étalons de référence pour la mettre en accord avec $R_{K,90}$,
- que, pour établir un étalon de référence de résistance électrique fondé sur l'effet Hall quantique, les laboratoires suivent les conseils pour la mise en oeuvre de la résistance de Hall quantifiée élaborés par le Comité consultatif d'électricité et publiés par les soins du Bureau international des poids et mesures, dans leur édition la plus récente,

et estime qu'aucun changement de cette valeur recommandée de la constante de von Klitzing ne sera nécessaire dans un avenir prévisible.

Lors de sa 89^e session en 2000, le CIPM a approuvé la déclaration de la 22^e session du CCEM concernant la valeur de la constante de von Klitzing, voir p. 77.

- Deux phénomènes physiques:
 - Effet Hall quantique entier (1980)
 - Effet Hall quantique fractionnaire (1983)

Niveaux de Landau

Mouvement d'un électron dans un champ B:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

⇒ Rayon cyclotron $R = mv/eB$

⇒ Pulsation cyclotron $\omega = eB/m$

Quantification de Bohr-Sommerfeld

- 1913: quantification de l'atome d'hydrogène
- Sur une trajectoire périodique:

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = (n + \gamma)h$$

Avec n entier positif et γ entre 0 (large) et 1 (strict) et

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A} = m\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$$

Quantification de Bohr-Sommerfeld

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A} = m\vec{v} - \frac{1}{2}e\vec{B} \wedge \vec{r}$$

donne ici

$$2\pi R(mv - \frac{1}{2}eBR) = (n + \gamma)h$$

Ici, $\gamma=1/2$

Et comme par le PFD, $mv=eBR$,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = (n + \frac{1}{2})\hbar \frac{eB}{m} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Quantification de Bohr-Sommerfeld

- L'énergie est donc quantifiée (niveaux de Landau)
- Donc le rayon cyclotron aussi:

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB} \frac{(n+1/2)\hbar}{R} \frac{2}{m} = \frac{\hbar(2n+1)}{eBR}$$

$$R = \sqrt{\frac{\hbar(2n+1)}{eB}} = \sqrt{(2n+1)} \cdot l_B$$

l_B est appelée longueur magnétique

Remplissage des niveaux d'énergie

On sait qu'à deux dimensions, la densité d'états est: (indépendant de l'énergie)

$$\rho(\varepsilon) = s \frac{m}{2\pi\hbar^2}$$

Avec $s=2$ (dégénérescence de spin)

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$$

Remplissage des niveaux d'énergie

Entre deux niveaux de Landau:

$$n_B = \rho_1 \hbar \omega_c = \frac{eB}{h}$$

Pour n_{el} électrons et un champ B, le facteur de remplissage est:

$$\nu = \frac{n_{el}}{n_B} \quad \text{d'où} \quad R_H = \frac{h}{\nu e^2}$$

Remplissage des niveaux d'énergie

Conséquence:

$$\text{A niveaux remplis, } R_H = \frac{h}{ie^2}$$

On a donc la quantification, mais pour les plateaux?

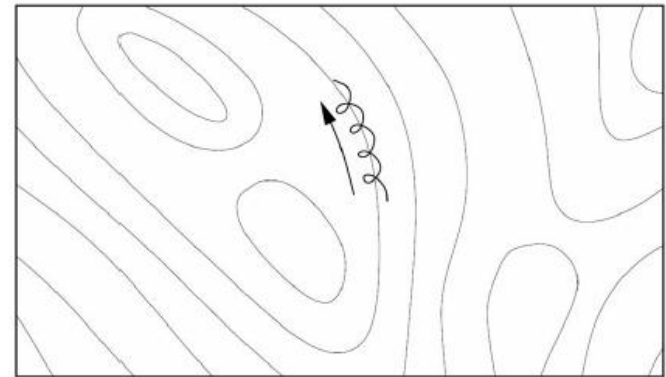
Rôle du désordre

Sans impuretés, pas d'EHQ.

Impuretés \rightarrow potentiel $V(r)$ aléatoire à variations lente devant le rayon cyclotron

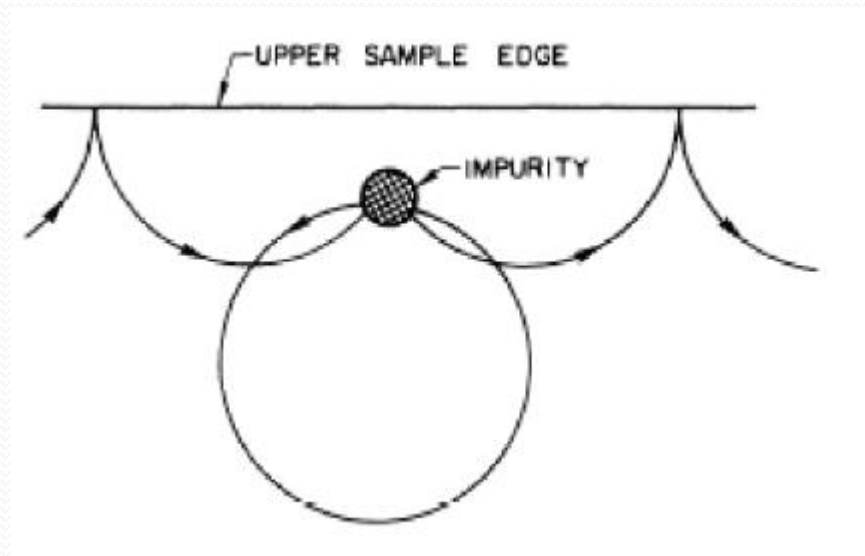
Rappel:
$$\vec{E} = \frac{1}{e} \vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{1}{e} \frac{(\vec{\nabla}V \wedge \vec{B})}{B^2}$$

Piégeage par le désordre
(équipotentiels) \rightarrow pas de
transport électronique



Rôle du désordre

Seuls les états de bords peuvent donc contribuer au courant

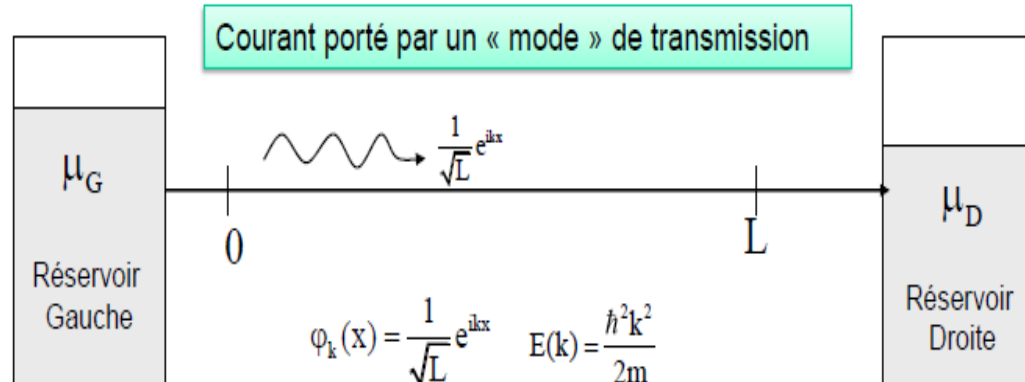


Transmission parfaite (insensibilité au désordre)

Rappel

5) Transport électronique

5.7.3 Le quantum de conductance



$$j(k) = \frac{e}{L} v(k) = \frac{e}{L\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{e}{L} \frac{\hbar k}{m}$$

Courant venant de la gauche et se propageant vers la droite dans la gamme d'énergie $[E, E+\Delta E]$

$$I_{E, E+\Delta E} = \frac{L}{2\pi} \int_{k(E)}^{k(E+\Delta E)} j(k) dk = \frac{L}{2\pi} \int_E^{E+\Delta E} j(E) \frac{dk}{dE} dE = \frac{e}{h} \Delta E$$

Rappel

5) Transport électronique

Conducteur placé entre deux réservoirs de potentiel chimique différent

$$I = \frac{L}{2\pi} \int_0^{k(\mu_G)} j(k) dk + \frac{L}{2\pi} \int_0^{k(\mu_D)} j(-k) dk = \frac{e}{h} (\mu_G - \mu_D)$$

$$(\mu_G - \mu_D) = eV \quad I = \frac{e^2}{h} V$$

$$G_0 = \frac{e^2}{h} \quad \text{« Quantum » de conductance}$$

Rq: Le calcul précédent s'applique également à une onde de Bloch
(Nous n'avons jamais utilisé l'expression exacte de l'onde plane...)

A.N.

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$$

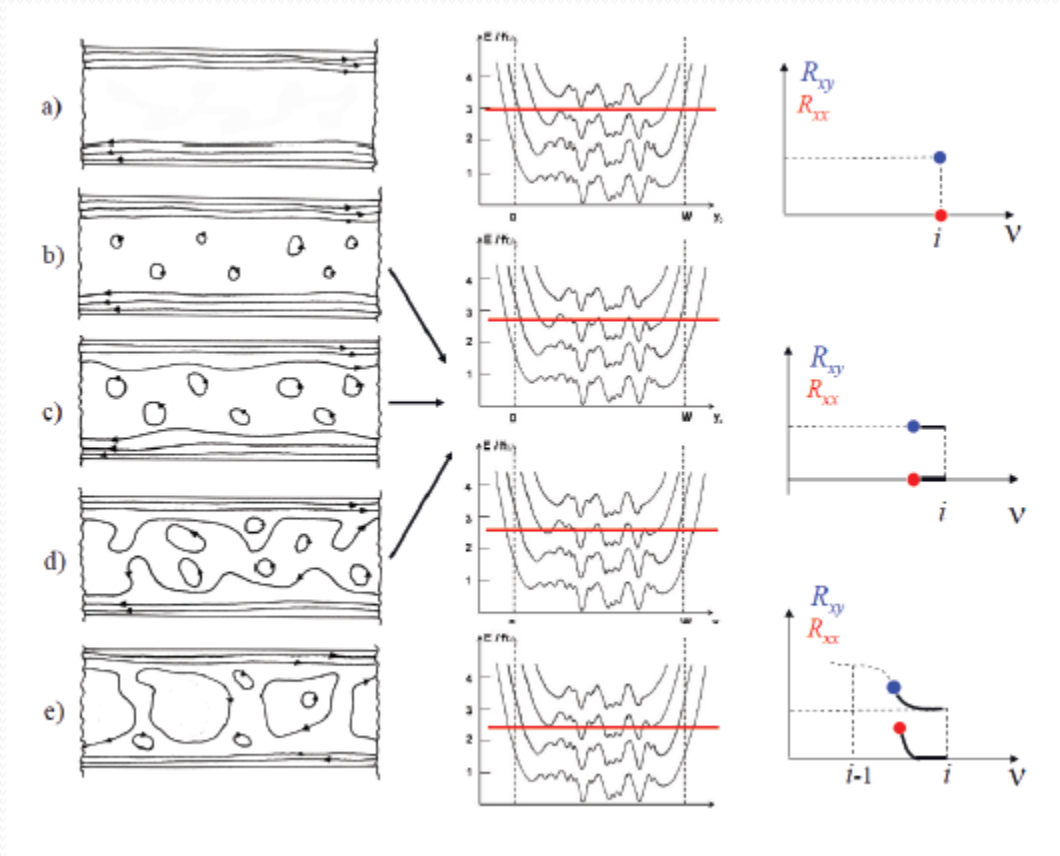
$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\rho_0 = \frac{1}{G_0} = 26 \text{ k}\Omega$$

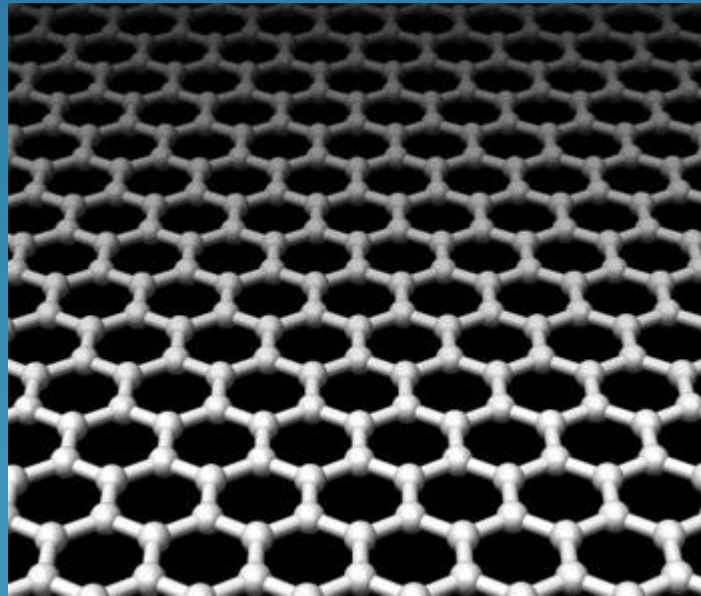
- Donc chaque état de bord jouant le rôle d'un canal, pour i canaux,

$$R = \frac{h}{ie^2}$$

Origine des plateaux



2. L'Effet Hall Quantique Anormal dans le Graphène



• Observé en 2005

Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry's Phase in Graphene
 Yanyao Zhang¹, Yan-Wen Tan¹, Horst L. Störmer^{2,3} & Philip Kim¹

¹Department of Physics, Columbia University, New York, New York 10027, USA ²Department of Applied Physics and Applied Mathematics, Columbia University, New York, New York 10027, USA

When electrons are confined in two-dimensional (2D) materials, quantum mechanically enhanced transport phenomena, as exemplified by the quantum Hall effect (QHE), can be observed. Graphene, an isolated single layer of graphite, is an ideal realization of such a 2D system. Its behaviour is, however, expected to differ dramatically from the well-studied case of quantum wells in conventional semiconductor interfaces. This difference arises from the unique electronic properties of graphene, which exhibits electron-hole degeneracy and vanishing carrier mass near the point of charge neutrality.^{1,2} Indeed, a distinctive half-integer QHE^{3,4} has been predicted theoretically, as has been the existence of a non-zero Berry's phase of the electron wavefunction, a consequence of the exceptional topology of the graphene band structure.^{5,6} Recent advances in micro-mechanical extraction and fabrication in ultraclean 2D electron systems^{7,8} now permit such unique properties to be probed experimentally. Here, we report an experimental investigation of graphene in a high mobility potential layer of graphene. Adjusting the chemical an unusual half integer QHE for both electron and hole carriers in graphene. The relevance of Berry's phase to these experiments is confirmed by magneto-oscillations. In addition to their purely scientific interest, these unusual quantum transport phenomena suggest carbon-based electronic and magneto-electronic device applications.

The low energy band structure of graphene can be approximated as cones located at two inequivalent Brillouin zone corners (left inset to Fig 1a). In these cones, the 2D energy dispersion relation is linear and the electron dynamics can be treated as 'relativistic', where the Fermi velocity v_F of the graphene plane

role of the speed of light. In particular, at the apex of the cones (named Dirac point), electrons and holes (particles and antiparticles) are degenerate. Landau level (LL) formation for electrons in such system under a perpendicular magnetic field, B , has been studied theoretically using an analogy to the 2+1 dimensional Quantum Electro Dynamics (QED)^{9,10}, where the Landau level energy is given by

$$E_n = -\text{sgn}(n) \sqrt{2e\hbar v_F |n| B}$$

Here e and $\hbar = h/2\pi$ are electron charge and Planck's constant divided by 2π , and the integer n represents an

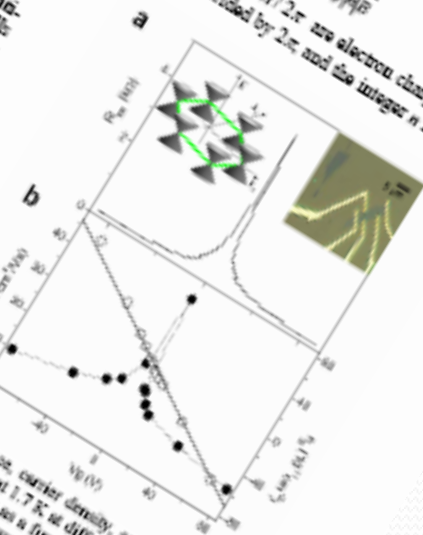
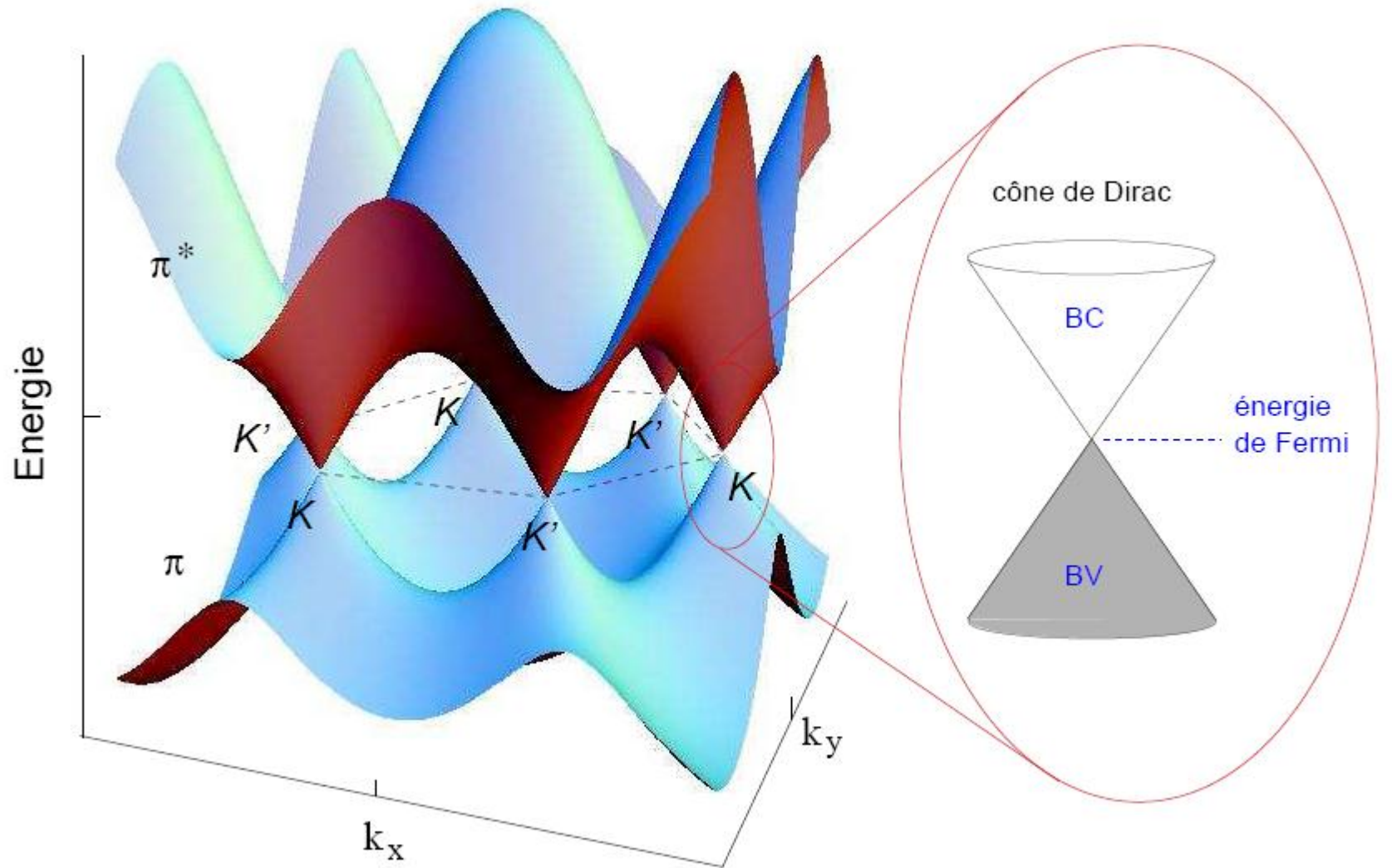
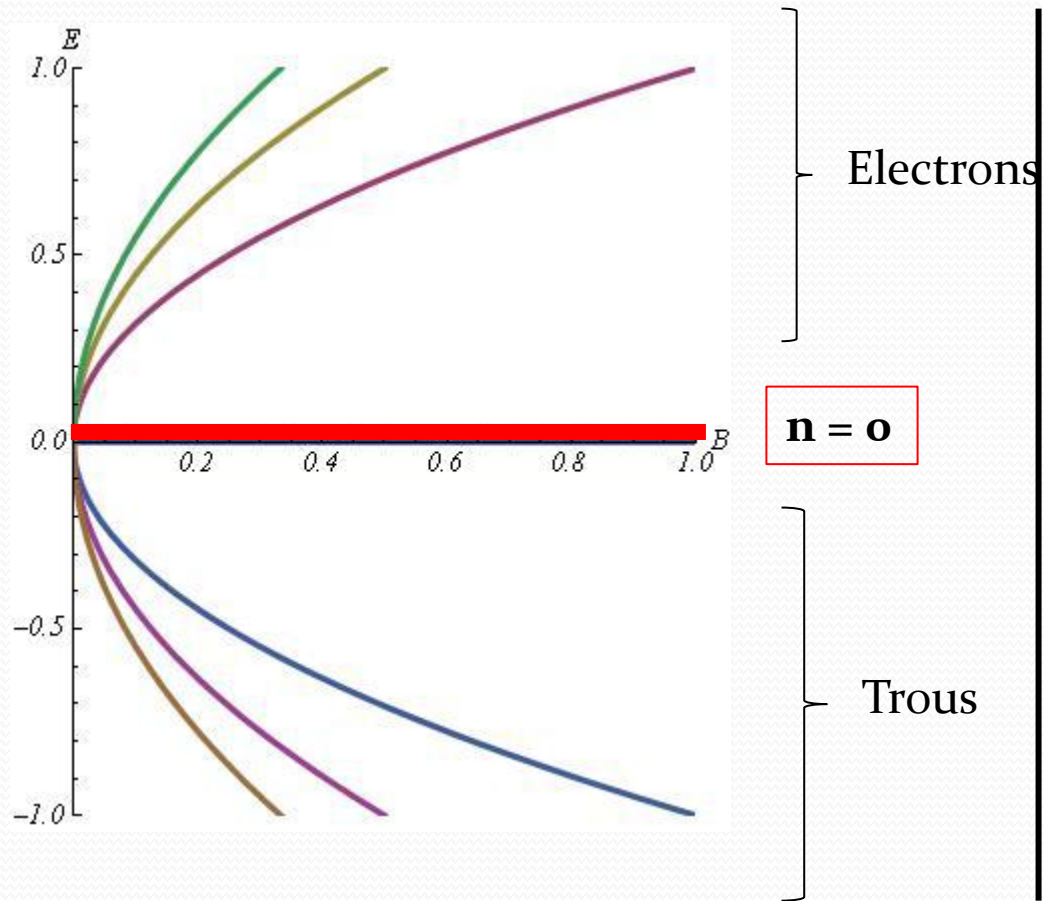


Figure 1 Resistance, carrier density, and mobility of graphene measured at 1.7 K at different gate voltages. a, Resistance changes as a function of gate voltage. Inset in the right inset shows the position of the Brillouin zone. b, Resistance changes as a function of carrier density. Inset shows a schematic diagram of the Brillouin zone. The Dirac cones are always of the order of $\sim 4e^2/h$ to each other. Out of the Brillouin zone, the Dirac cones are separated by the Fermi velocity v_F of the graphene plane.



Dégénérescence de vallée

Niveaux de Landau dans le graphène



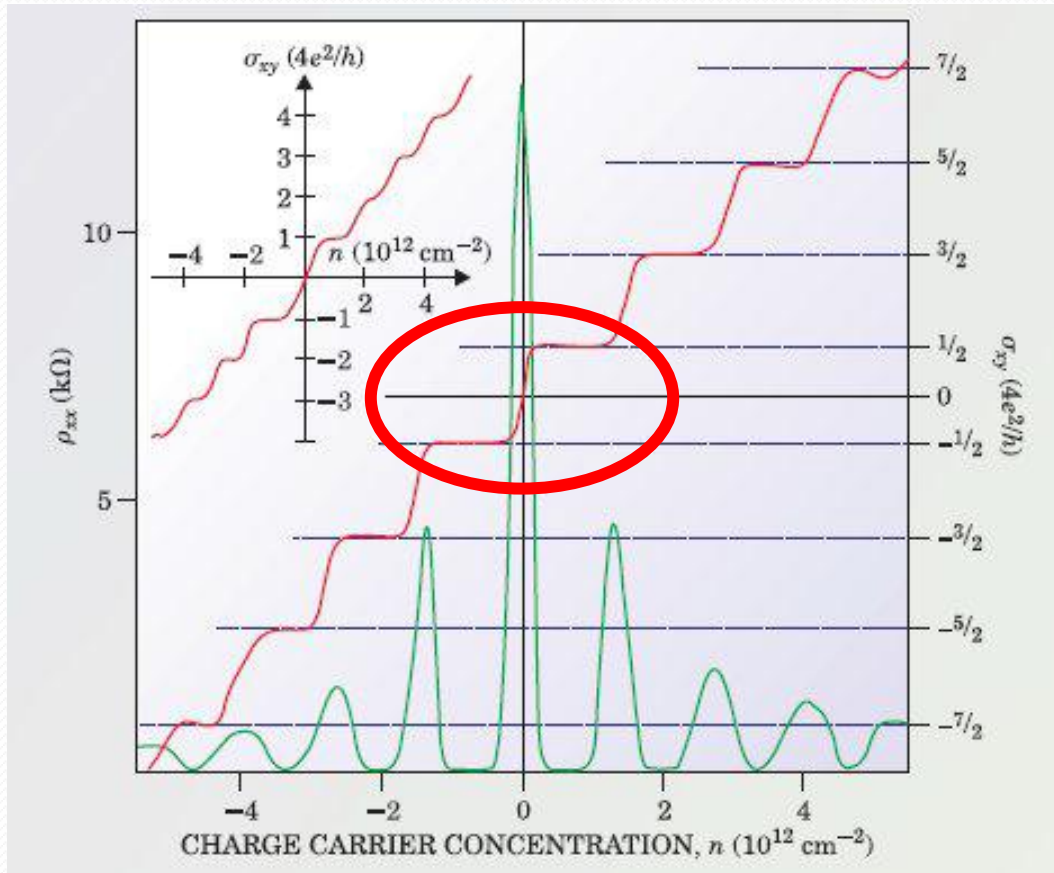
Equation de Dirac sans masse



$$E_n = \mp v_F \sqrt{2ne\hbar B}$$

~~$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar e B}{m}$$~~

2. Effet Hall Quantique Anormal dans le graphène



$$\sigma_{xy} = \left(n + \frac{1}{2}\right) g_s g_v \frac{e^2}{h}$$

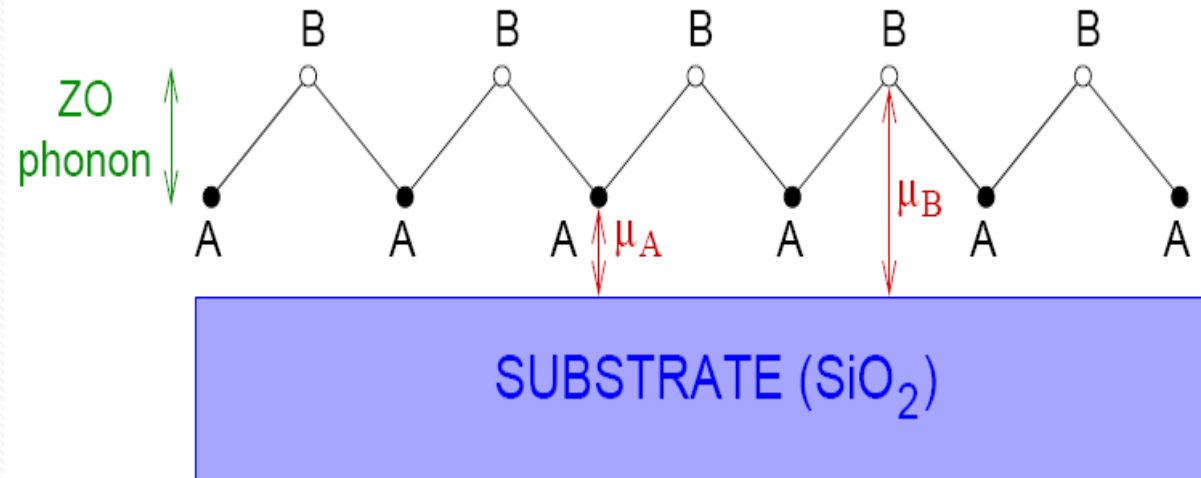
~~$$\sigma_{xy} = n g_s \frac{e^2}{h}$$~~

Pourquoi une levée de dégénérescence en zéro ?

$$\sigma_{xy} = 2 \frac{e^2}{h}$$

1. Vallée ?

Distorsion de Peierls



2. Spin ?

effet Zeeman + Interaction d'échange

Application potentielle : Résistance de Hall

$$R_k = \frac{e^2}{h} \quad \longrightarrow \quad R = 25812.807 \, \Omega$$

• Intérêt :

→ Température ambiante

→ Faible champ magnétique

