ESPCI Première année Année 2005-2006
Méthodes Mathématiques
Cyrille Barreteau
cyrille.barreteau@cea.fr
http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php

Tutorat no 5
Distributions : Kramers Kronig et application à l'optique

Résumé

Les distributions forment un outil extrêmement puissant et élégant dont la théorie a été développée par Laurent Schwartz. Cette théorie permet notamment de justifier la manipulation de nombreuses équations que les physiciens utilisent depuis longtemps sans trop de précaution. On pourrait dire que tel monsieur Jourdan le physicien utilise les distributions sans le savoir. C'est parfois sans conséquence dans les cas simples mais la physique regorge d'exemples où la bonne compréhension des distributions permet une analyse plus pertinente. Dans la première section nous rappelons les définitions et propriétés élémentaires des distributions. Dans la deuxième section nous montrons comment la distribution de Dirac peut s'obtenir comme limite d'une suite de distributions associées à des fonctions intégrables. Dans la troisième section nous introduisons la " valeur principale" de Cauchy et démontrons une formule utile :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} = \mathrm{vp}(\frac{1}{x-x_0}) - i\pi\delta(x-x_0)$$

Enfin dans la quatrième section nous ferons bonne usage de cette formule pour démontrer les "fameuses" relations de Kramers-Kronig que nous appliquerons à l'optique dans la dernière section.

1 Quelques notes de Cours

1.1 Définition des distributions

On appelle $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions indéfininment dérivables à support borné. $\mathcal{D}$ est un espace topologique muni de la convergence suivante :

La suite de fonctions ϕ_n appartenant à $\mathcal{D}$ converge pour $n \to \infty$ vers une fonction ϕ si :

- Les supports de ϕ_n sont contenus dans un même ensemble borné.
- Quand n tend vers l'infini, ϕ_n converge **uniformément** vers ϕ et chaque dérivée de ϕ_n converge uniformément vers la dérivée correspondante.

On note $\mathcal{D}'$ le dual toplogique de $\mathcal{D}$, c'est à dire l'ensemble des fonctionnelles **linéaires et continues** sur $\mathcal{D}$. Les éléments de $\mathcal{D}'$ sont appelés les **distributions**. Si T est un élément de $\mathcal{D}'$ et ϕ un élément de $\mathcal{D}$, on note $< T,\phi >$ $(\in\mathbb{C})$ l'application de T sur ϕ. La continuité de T signifie que pour toute suite ϕ_n convergeant dans $\mathcal{D}$ (au sens décrit précédemment), la suite complexe $< T,\phi_n >$ converge vers $< T,\phi >$.

On appelle distribution **régulière** une distribution T_f associée à une fonction localement sommable f :

$$\forall\phi\in\mathcal{D}, \quad < T_f,\phi >= \int f(x)\phi(x)dx$$

L'intégrale étant prise au sens de Lebesgue.

On appelle distribution **singulière** toute distribution qui n'est pas régulière. L'exemple le plus usuel est la distribution de Dirac δ définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad <\delta, \phi> = \phi(0)$$

On retiendra qu'il n'existe pas de fonction localement sommable $\delta(x)$ telle que $T_{\delta(x)} = \delta$.

1.2 Propriétés élémentaires et opérations simples sur les distributions

On définit la combinaison linéaire de deux distributions par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, <\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \phi> = \lambda_1 <T_1, \phi> + \lambda_2 <T_2, \phi>, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

La dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, <T', \phi> = -<T, \phi'>$$

Ainsi toute distribution est indéfiniment dérivable.

Si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et T une distribution quelconque, alors on définit le produit ψT :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, <\psi T, \phi> = <T, \psi \phi>$$

1.3 Suite de distributions

Soit T_α une famille de distribution dépendant d'un paramètre α (α entier ou réel). On dit que T_α admet pour limite la distribution T quand $\alpha \to \lambda$ (λ fini ou infini) si :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \lim_{\alpha \to \lambda} <T_\alpha, \phi> = <T, \phi>$$

Il existe un cas particulièrement intéressant : si f_α est une famille de fonctions localement intégrables on définit la famille de distributions régulières $T_\alpha = T_{f_\alpha}$. La suite de distributions régulières T_α peut très bien admettre une limite T qui elle n'a aucune raison d'être régulière. Un exemple sera donné avec la distribution de Dirac.

2 Suite de distibutions convergeant vers le delta de Dirac

Nous allons établir un résultat permettant de mieux saisir intuitivement ce que représente la distribution de Dirac. Soit f une fonction Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

On définit la suite de fonction :

$$f_n(x) = nf(nx)$$

Montrer que toutes les fonctions f_n sont d'intégrale 1 et démontrer la formule :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(\frac{x}{n})dx$$

Utilisez le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f(x)\phi(\frac{x}{n})$ pour démontrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

Quelle est alors la limite au sens des distributions de $nf(nx)$. Généraliser ce résultat à la suite de fonction $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}f(\frac{x}{\alpha}) \quad \alpha\in\mathbb{R}^+$ et montrer qu'au sens des distributions :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}f(\frac{x}{\alpha}) = \delta$$

Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

est une fonction qui satisfait les bonnes conditions. En déduire que

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} = \delta$$

Ce résultat important permettant d'obtenir la distribution de Dirac comme suite de distributions régulières est également valable lorsque la fonction f est Riemann intégrable mais pas Lebesgue intégrable[1]. En déduire que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\frac{x}{\alpha})}{x} = \delta$$

3 Une formule utile

3.1 Valeur principale de Cauchy

La fonction $x\to 1/x$ n'étant pas localement intégrable, on ne peut pas définir une distribution régulière qui lui soit associée. En revanche montrez que la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon \quad \text{avec} \quad I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

a un sens pour tout $\phi\in\mathcal{D}$. On pose alors :

$$< \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\phi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

On définit ainsi une distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ appelée valeur principale (au sens de Cauchy) que l'on note aussi souvent :

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

[1]La démonstration est cependant plus compliquée car il faut alors découper les epsilons en morceaux.. Voir la démonstration dans le livre de Nino Boccara "les distributions" (page 53)

3.2 Valeur principale de Cauchy et delta de Dirac

On s'intéresse à la limite au sens des distributions :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon}$$

Séparer la partie réelle et imaginaire et montrer en utilisant les résultats des sections 3 et 4 que [2] :

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathrm{vp}\frac{1}{x} - i\pi\delta}$$

4 Les relations de Kramers-Kronig.

Soit $f(z)$ une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ mais holomorphe sur le demi plan supérieur.

a) On considère l'intégrale sur un contour $\mathcal{C}$ dans le demi plan supérieur que l'on fait tendre à l'infini :

$$I(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

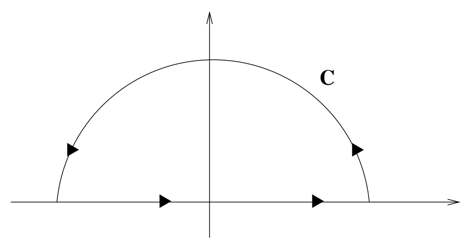

FIG. 1 – *Contour d'intégration dans le demi plan supérieur.*

Montrer que la valeur de $I(z)$ dépend du signe de sa partie imaginaire $\Im(z)$, plus exactement :

$$I(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } \Im z > 0 \\ 0 & \text{si } \Im z < 0 \end{cases}$$

b) On pose dans cette formule $z = x + i\varepsilon$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$f(x+i\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

On suppose que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 quand le rayon tend vers l'infini. Utiliser la formule de la quatrième partie pour démontrer que :

$$f(x) = \frac{1}{i\pi} < \mathrm{vp}\frac{1}{x'-x}, f(x') >$$

c) Déduire du résultat précédent que :

[2]Penser à utiliser la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\phi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(\phi(x)-\phi(-x))}{x^2+\varepsilon^2}dx$ et appliquer le théorème de la convergence dominée

$$\Re[f(x)] = \frac{1}{\pi} < \mathrm{vp}(\frac{1}{x'-x}), \Im[f(x')] > \quad ; \quad \Im[f(x)] = -\frac{1}{\pi} < \mathrm{vp}(\frac{1}{x'-x}), \Re[f(x')] >$$

Ces relations sont appelées relations de Kramers-Kronig par les physiciens. Les mathématiciens eux disent que la partie réelle $\Re[f]$ est la transformée de Hilbert de la partie imaginaire $\Im[f]$.

5 Relations de Kramers-Kronig en optique

Les mesures d'optiques qui donnent l'information la plus complète sur la structure électronique d'un système sont les mesures de réflectivité. On appelle coefficient de réflectivité le rapport $r(\omega)$ entre le champ électrique réflechi E_r et le champ électrique incident E_i :

$$r(\omega) = \frac{E_r}{E_i} = \rho(\omega)e^{i\theta(\omega)}$$

On montre qu'en incidence normale le coefficient de réflectivité s'écrit simplement :

$$r(\omega) = \frac{\mathcal{N}(\omega)-1}{\mathcal{N}(\omega)+1}$$

$\mathcal{N}(\omega)$ étant l'indice de réfraction du milieu qui est une grandeur complexe que l'on décompose en une partie réelle et imaginaire :

$$\mathcal{N}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$$

On définit également le coefficient de réflexion R qui est le rapport de l'intensité réfléchie sur l'intensité incidente, soit :

$$R = \rho^2(\omega)$$

Enfin $\mathcal{N}(\omega)$ et la fonction diélectrique sont reliés par la relation :

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \mathcal{N}(\omega)$$

Il est également coutume de séparer la partie réelle et imaginaire de la fonction diélectrique :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega) + i\varepsilon_{\mathrm{i}}(\omega)$$

Montrez que :

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega) = n^2 - \kappa^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\mathrm{i}}(\omega) = 2n\kappa$$

5.1 Modélisation du milieu

On considère un système dont la réponse à une excitation est linéaire. On modélise le milieu par la superposition d'oscillateurs amortis de masse M_j. La fonction réponse $\alpha(\omega) = \alpha_{\mathrm{r}}(\omega) + i\alpha_{\mathrm{i}}(\omega)$ de cette assemblée d'oscillateurs est définie par :

$$x_\omega = \alpha(\omega)F_\omega$$

où la force appliquée est la partie réelle de $F_\omega \exp(-i\omega t)$ et le déplacement total est $x = \sum_j x_j$ est la partie réelle de $x_\omega \exp(-i\omega t)$. D'après les équations du mouvement on a :

$$M_j(\frac{d^2x_j}{dt^2} + \xi_j \frac{dx_j}{dt} + \omega_j^2) = F$$

Montrez que

$$\alpha(\omega) = \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\xi_j}$$

où $f_j = 1/M_j$ et les ξ_j sont des fréquences de relaxation positives.
Montrez les propriétés suivantes :

a) Les pôles de $\alpha(\omega)$ sont tous de partie imaginaire négative
b) $\alpha(\omega)/\omega$ tend vers zéro sur le demi cercle du plan supérieur.
c) La fonction $\alpha_{\mathrm{r}}(\omega)$ est paire et la fonction $\alpha_{\mathrm{i}}(\omega)$ impaire.

5.2 application des relations de Kramers Kronig

Montrez que l'on peut appliquer les relations de Kramers Kronig à la fonction réponse $\alpha(\omega)$ et utilisez les propriétés de parité de cette fonction pour démontrer que :

$$\alpha_{\mathrm{r}}(\omega) = \frac{2}{\pi}\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} \frac{s\alpha_{\mathrm{i}}(s)}{s^2-\omega^2}ds \quad \text{et} \quad \alpha_{\mathrm{i}}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_{\mathrm{r}}(s)}{s^2-\omega^2}ds$$

On applique le résultat précédent au coefficient de réflectivité ou plus exactement au logarithme du coefficient de réflectivité[3] :

$$\ln r(\omega) = \ln\sqrt{R}(\omega) + i\theta(\omega)$$

En déduire que la phase de la réflectivité s'obtient en fonction du coefficient de réflexion par la relation :

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{\pi}\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} \frac{\ln R(s)}{s^2-\omega^2}ds$$

Par intégration par partie montrer que

$$\theta(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} \ln\left|\frac{s+\omega}{s-\omega}\right| \frac{d\ln R(s)}{ds}ds$$

En déduire que les régions spectrales où le coefficient de réflexion est constant ainsi que celles pour lesquelles $s >> \omega$ ou $s << \omega$ ne contribuent pas.

[3] On peut montrer de manière générale que la fonction diélectrique possède bien les bonne propriétés car $\varepsilon(t)$ est réel et par conséquent $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^\star(-\omega)$ ce qui implique la parité de la partie réelle et l'imparité de la partie imaginaire