ESPCI Deuxième année Année 2005-2006
Méthodes Mathématiques
Cyrille Barreteau
cyrille.barreteau@cea.fr
http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php

Tutorat no 4
Equations aux dérivées partielles du 1er ordre

Résumé

Si vous feuilletez un livre sur les équations aux dérivées partielles appliquées à la physique vous vous apercevrez rapidement que la plupart des “grandes” équations aux dérivées partielles de la physique sont des équations du second ordre. D’autre part vous trouverez souvent les équations du premier ordre traitées parmi les équations différentielles “ordinaires”, ceci est dû au fait que la méthode des caractéristiques ramène l’étude des équations aux dérivées partielles à des équation différentielles ordinaires le long des courbes caractéristiques. Comme vous allez le voir dans ce tutorat les équations aux dérivées partielles du premier ordre sont pourtant intéressantes et peuvent donner lieu à des comportements complexes.

1 Notions d’intégrales premières.

1.1 Définition.

Soit un système différentiel :

$$x_i' = \frac{dx_i}{d\xi} = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

où les $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On appelle *intégrale première* sur U du système différentiel, toute fonction $F : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

Montrer que pour toute solution du systeme différentiel (1) la fonction $\xi \to F(x_1(\xi), x_2(\xi), \cdots, x_n(\xi))$ est constante.

1.2 Exemple simple.

Soit le système bidimensionnel $x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1$, montrer que la fonction $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ est une intégrale première (trajectoire circulaire de centre 0).

1.3 Généralisation.

En vous inspirant de l’exemple précédent donner une intégrale première sur $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, où A est une matrice antisymétrique $n \times n$. En déduire que chaque trajectoire est contenue dans une sphère de centre O.

2 Méthode des caractéristiques.

Soit l'équation aux *dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre* :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},u) \tag{3}$$

où les a_i et b sont données et u est la fonction inconnue de la variable $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

2.1 Interpretation géométrique

Supposons connue la fonction $u(\mathbf{x})$, montrer que le vecteur $\mathbf{Z} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$ est tangent à la " surface" $\mathcal{S}$ d'equation $z = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

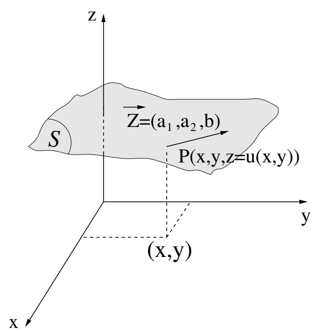

FIG. 1 – *Représentation géométrique de la surface $\mathcal{S}$ d'equation $z = u(x,y)$ et du vecteur tangent* $\mathbf{Z}$

2.2 Equation aux intégrales premières

Plus généralement on définit la surface $\mathcal{S}$ sous la forme d'une équation implicite :

$$F(x_1, x_2, , \cdots, x_n, z) = 0$$

Montrer que l'équation (3) peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},z)\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x},z) + b(\mathbf{x},z)\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x},z) = 0 \tag{4}$$

On a donc ramené l'équation quasi linéaire (3) à une équation *linéaire* en F à $(n+1)$ variables (4). On reconnait ainsi l'intégrale première du système différentiel :

$$\frac{dx_i}{d\xi} = a_i(\mathbf{x},z) \quad , \quad \frac{dz}{d\xi} = b(\mathbf{x},z) \tag{5}$$

2.3 Théorème des fonctions implicites

Nous rappelons ici un théorème très important qui nous servira dans la suite. Il s'agit du théorème des fonctions implicites que nous énonçons sous une forme simplifiée :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $(\mathbf{a}, b)$ un point de U et $f : (\mathbf{x}, y) \to f(\mathbf{x}, y)$ une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathbf{a}, b) = 0$ et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b)$ est non nulle. Alors l'équation $f(\mathbf{x}, y) = 0$

peut être résolue localement par rapport à la variable y. Ce qui signifie que l'on peut trouver un voisinage V de $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{R}^n$ et W de b dans $\mathbb{R}$ et une application ϕ de classe C^1 unique, telle que :

$$(\mathbf{x} \in V, \quad y \in W \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}, y) = 0) \iff (\mathbf{x} \in V \quad \text{et} \quad y = \phi(\mathbf{x}))$$

Prenons un exemple simple. Considérons la fonction $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. L'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ qui définit la sphère peut aussi s'écrire sous forme explicite par rapport à la variable z : $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ mais il y'a deux expression selon que l'on considère la partie "supérieure" ($z > 0$) ou "inférieure de la sphère" ($z < 0$). Si on choisit un point $M(x,y,z)$ dans la partie supérieure (resp. inférieure) alors la fonction ϕ est définie de manière unique par $\phi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (resp. $\phi(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$). Par contre pour tout point M situé sur le cercle intersection entre la sphère et le plan $z = 0$ le théorème n'est visiblement pas applicable. On vérifie en effet que sur ce cercle $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0) = 0$.

2.4 Méthode des caractéristiques

Les remarques précédentes suggèrent la méthode de résolution suivante :

- résoudre le système différentiel caractéristique (5) ;
- éliminer la variable ξ entre les relations $x_1 = x_1(\xi), x_2 = x_2(\xi), \cdots, x_n = x_n(\xi), z = z(\xi)$ pour obtenir une intégrale première $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)$;
- si l'équation $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) = 0$ permetb de définir explicitement $z = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, alors u est solution de l'équation quasi-linéaire donnée (3) ,

2.5 Conditions au bord / Conditions initiales

Nous avons jusqu'à présent éludé le problème des conditions au bord de l'équation (3).Le problème de Cauchy consiste à déterminer les fonctions $u(\mathbf{x})$ vérifiant l'équation (3) avec pour condition au bord $u = u_0(x,y)$ sur une courbe (ou surface) $\overline{\Gamma}$ donnée. Supposons que la courbe $\overline{\Gamma}$ se mette sous forme paramétrique $\overline{\Gamma}(s) = (x_1^0(s), x_2^0(s), \cdots, x_n^0(s))$. La condition au bord sur la fonction u se traduit sur les courbes caractéristiques :

$$\begin{aligned} x_1(s,0) = x_1^0(s), \cdots, x_n(s,0) = x_n^0(s) \\ z(s,0) = u_0(s) = u_0(x_1^0(s), x_2^0(s), \cdots, x_n^0(s)) \end{aligned}$$

Il est clair que pour que la condition au bord soit acceptable il est nécessaire que $\overline{\Gamma}$ ne corresponde pas à une "trajectoire" caractéristique.

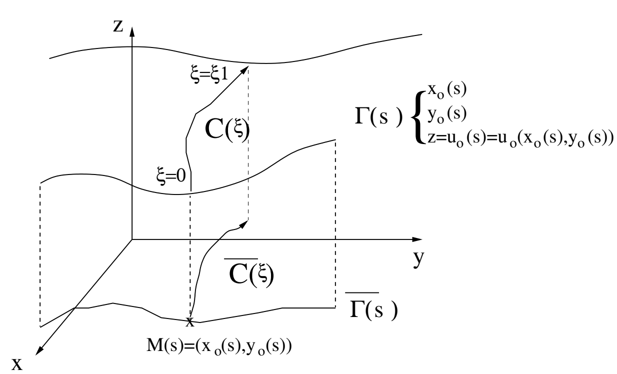

FIG. 2 – *Condition au bord et courbes caractéristiques.*

3 Equation de Burgers

Etant données deux fonctions $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on veut résoudre l'équation aux dérivées partielles de Burgers en la fonction inconnue $u(x,y)$:

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x) \tag{6}$$

3.1 Système caractéristique

Résoudre le système différentiel caractéristique :

$$\frac{dx}{d\xi} = a(z) \quad , \quad \frac{dy}{d\xi} = 1 \quad , \quad \frac{dz}{d\xi} = 0$$

avec les conditions initiales :

$$x(s,0) = s \quad , \quad y(s,0) = 0 \quad , \quad z(s,0) = f(s) \quad \text{où } s \text{ est un paramètre}$$

3.2 Intégrale première et inversion

Montrer que $F(x,y,z) = z - f(x - ya(z))$ est une intégrale première du système différentiel caractéristique. Appliquer le théorème des fonctions implicites autour du point $(x_0, 0, f(x_0))$ pour montrer que l'on peut trouver une fonction $z = u(x,y)$ telle que $F(x,y,u(x,y)) = 0$

3.3 La solution

Démontrer que la fonction u solution de l'équation implicite vérifie bien l'équation de Burgers.

3.4 Problème d'inversion

Montrer d'après la section 3.2 que si la fonction $f(x)$ est décroissante et $a(z)$ une fonction croissante alors il existe un point (x_1, t_1, z_1) pour lequel $\partial F/\partial z = 0$ et que le théorème des fonctions implicites ne s'applique plus. Les solutions de l'équation de Burgers ne sont donc valabes que dans un domaine limité autour de l'axe $t = 0$.

4 Ecoulement unidimensionnel de particules sans interaction.

4.1 Le modèle

On considère un milieu de dimension un (un tuyau par exemple) composé de particules se déplaçant chacune par inertie sur une droite à une vitesse constante. Désignons par $u(x,t)$ la vitesse d'une particule au point x à l'instant t. Si $x = \phi(t)$ représente le chemin parcouru par une particule alors

$$\frac{d\phi}{dt} = u(\phi(t),t)$$

Ecrivez que l'accélération de la particule est nulle. En déduire que le champ de vitesse u vérifie l'équation :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad ; \quad t > 0 \tag{7}$$

4.2 Résolution de l'équation aux dérivées partielles

On considère l'équation (7) Avec pour conditions $u(x,0) = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction continue différentiable.

4.2.1 Caractéristiques

Montrer que les caractéristiques dans le plan (x,t) sont des demi droites partant d'un point M sur l'axe des x et de pente l'inverse de f au point M. Montrer que u est constante le long des caractéristiques.

4.2.2 Problème d'inversion

Montrer que les caractéristiques se croisent dans le demi plan $t > 0$ si la fonction $f(x)$ est une fonction décroissante. Que se passe-t-il au point d'intersection ?

4.2.3 Solution explicite dans un cas particulier

On considère le cas particulier suivant :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1-x & : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (CI) \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que $u = (1-x)/(1-t)$ dans le domaine $0 \leq x \leq t < 1$, $u = 1$ dans le domaine $x < 1, t > x$ et $u = 0$ dans le domaine $x > 1, t < 1$ mais que u n'est pas défini dans le quadrant $x > 1, t > 1$.

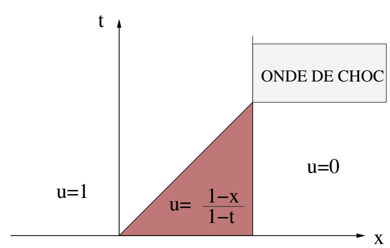

FIG. 3 – *Représentation graphique des solutions de l'équation de Burgers et de leurs domaines de définition.*

4.3 Notion d'ondes de choc

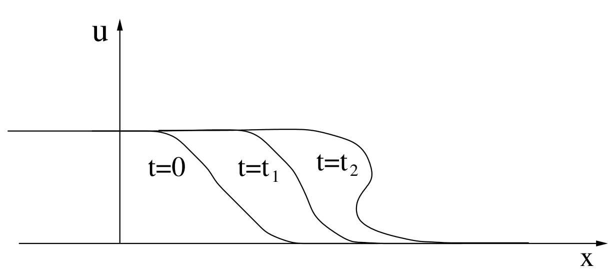

FIG. 4 – *Solutions de l'équation de Burgers à différents temps croissants.*

Sur la figure 4 nous avons représenté graphiquement les solutions de l'équation de Burgers pour différentes valeurs du temps. Il apparait clairement qu'au delà d'un certain temps $t \geq t_1$ il n'existe pas de solution différentiable. A partir de cet instant les particules se heurtent dans le milieu. En fait la condition physique du mouvement par inertie, c'est à dire l'absence d'interaction entre les particules, devient irréelle et doit être remplacée par une autre condition : la description du caractère du choc. Représentez les solutions de l'équation de Burgers comme sur la figure 4 dans le cas particulier de la section 4.2.3.