ESPCI Première année Année 2005-2006
Méthodes Mathématiques
Cyrille Barreteau
cyrille.barreteau@cea.fr
http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php

Tutorat no 4
Transformée de Fourier et de Laplace

Résumé

Les transformations de Fourier et Laplace jouent un rôle essentiel en physique. Dans ce tutorat nous nous proposons d'aborder deux cas d'application. Dans la première partie nous étudions la diffraction d'un faisceau monochromatique de lumière par un trou circulaire et montrons comment celle ci est reliée à la fonction de Bessel d'ordre 0 *et* 1*. Dans la seconde partie nous manipulons les fonctions de Bessel (développement en série entière etc..) et calculons leur transformée de Laplace.*

1 Diffraction par un trou circulaire et fonctions de Bessel

1.1 Rappels sur le changement de variables dans les intégrales multiples

1.1.1 Changement de variables dans les intégrales doubles

Soit $f(x,y)$ une fonction des deux variables réelles, on cherche à calculer l'intégrale double sur un domaine D du plan $\mathbb{R}^2$:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

On souhaite effectuer cette intégrale par rapport à un autre jeu de variable (polaire par exemple) u,v telque $u=u(x,y)$ et $v=v(x,y)$ ou inversement $x=x(u,v), y=y(u,v)$. On notre D' le domaine de variation des variables u et v lorsque x et y parcourent D. On montre que :

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} g(u,v)|J(u,v)|dudv$$

Où $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ et J est le Jacobien :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

1.1.2 Changement de variables dans les intégrales mutliples

Le résultat précédent se généralise au cas des intégrales multiples quelconques. Il suffit de définir le Jacobien à n dimension qui est un déterminant $n \times n$. Le changement de variable de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ revient alors à remplacer $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ par $|J(u_1, u_2, \cdots, u_n)|du_1 du_2 \cdots du_n$ sous l'intégrale.

1.1.3 Changement de variable par rotation

On considère le cas d'un changement de variable telque les vecteurs $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ soient reliés par la relation linéaire $\mathbf{X} = R\mathbf{U}$. R étant une matrice, montrez que le Jacobien J est égal à son déterminant.

On s'intéresse au cas où la transformations linéaire R est une isométrie (application qui conserve les distances et le produit scalaire) et à ce titre possède un déterminant égal à 1 ou -1. On suppose par ailleurs que le domaine d'intégration D est invariant par la transformation linéaire c'est à dire que $R(D) = D$. Montrez alors que

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots x_n = \int \cdots \int_D g(u_1, u_2, \cdots, u_n) du_1 du_2 \cdots u_n$$

1.2 Rappels sur les fonctions de Bessel

On rappelle la définition des fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin\theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta) d\theta \quad \text{et la propriété} \quad \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

1.3 Rappels de diffraction

On éclaire un plan percé d'un trou (Fig. 1) par un faisceau de lumière monochromatique perpendiculaire au plan. On admet que loin de la pupille de diffraction, le champ électrique $\mathcal{E}$ sur l'écran est proportionnel à l'intégrale :

$$\iint_S e^{-i(\sigma_X x + \sigma_Y y)} dx dy$$

Où l'intégrale est étendue à la surface S de la pupille, σ_X et σ_Y sont proportionnels aux coordonnées X et Y du point d'observation sur l'écran. On peut également écrire cette intégrale explicitement sous la forme d'une transformée de Fourier :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} T_S(\mathbf{r}) e^{-i\sigma.\mathbf{r}} dx dy \quad \text{avec} \quad \sigma = (\sigma_X, \sigma_Y); \quad \mathbf{r} = (x, y)$$

$T_S(\mathbf{r})$ étant le facteur de transmission de la plaque éclairée qui vaut 1 sur la pupille et 0 partout ailleurs.

1.4 Transformée de Fourier d'une fonction radiale

On appelle fonction radiale $f(x,y)$ une fonction qui ne dépend que de la norme $|\mathbf{X}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soit $\tilde{f}(\mathbf{K})$ sa tranformée de Fourier.

$$\tilde{f}(\mathbf{K}) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{X}) e^{-i\mathbf{K}.\mathbf{X}} dx dy$$

Démontrez en utilisant les résultats précédents sur les changements de variable que pour toute rotation $\tilde{f}(R\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k})$. Autrement dit $\tilde{f}(\mathbf{k})$ est également une fonction radiale.[1]

[1] On utilisera la relation $R\mathbf{K}.\mathbf{X} = \mathbf{K}.R^{-1}\mathbf{X}$ et on effectuera le changement de variable linéaire $R^{-1}\mathbf{X} = \xi$.

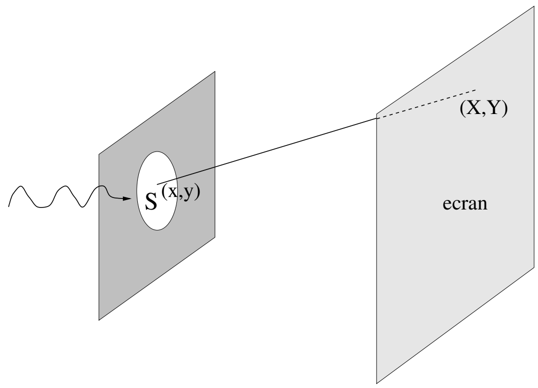

FIG. 1 – *Schéma de la diffraction par un trou*

1.5 Diffraction par un trou ciculaire

On suppose que la pupille est un trou ciculaire de rayon a. Montrez que le champ électrique est proportionnel à l'intégrale de la fonction de Bessel :

$$\mathcal{E} \propto 2\pi \int_0^a \rho J_0(\sigma_r \rho) d\rho \quad \text{où} \quad \sigma_X x + \sigma_Y y = \sigma_r \rho \cos\theta$$

Utilisez la propriété de la fonction de Bessel pour montrer que :

$$\mathcal{E} \propto a^2 \frac{J_1(t)}{t} \quad \text{avec} \quad t = \sigma_r a$$

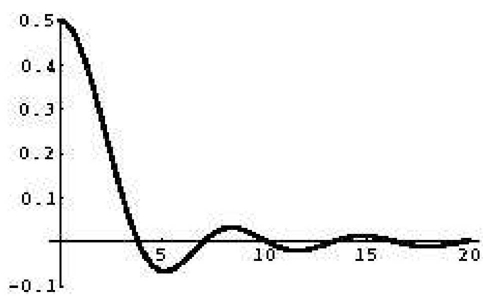

FIG. 2 – *Représentation graphique de la fonction* $\frac{J_1(t)}{t}$

2 Transformée de Laplace et fonctions de Bessel

2.1 Equation différentielle de Bessel

On considère la fonction $J_n(x)$. Montrer que J_n vérifie l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

2.1.1 Comportement en 0

Montrez que le premier terme dans le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction de Bessel $J_n(x)$ est $a_n x^n$. Par définition on normalise la fonction de Bessel $J_n(x)$ telle que $a_n = 1/(n!2^n)$ si bien qu'au voisnage de zéro on a :

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n!2^n}$$

2.1.2 Comportement à l'infini

Faire le changement de fonction $u(x) = \sqrt{x}y(x)$ pour $x > 0$ et montrer que cela permet de "supprimer" le terme en dérivée première. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'équation différentielle modifiée montrer que l'on se ramène à l'équation $u'' + u = 0$. Quel est à votre avis le comportement de $J_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Retrouver le résultat du tutorat no 3.

2.2 Développement en série entière de $J_0(x)$

On considère à présent l'équation différentielle :

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

En cherchant une solution sous la forme de série entière montrer que $J_0(x)$ s'écrit :

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (1)$$

Le rayon de convergence étant infini. Montrer qu'il est possible d'étendre cette formule dans le plan complexe et de définir une fontion $J_0(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) vérifiant l'équation différentielle $zy''(z) + y'(z) + zy(z) = 0$.

2.3 Utilisation de la transformation de Laplace

2.3.1 Définition et Théorème de la valeur initiale

On rappelle la définition de la tranformation de Laplace d'une fonction $f(t)$ qui se comporte bien à l'infini (ne croît pas plus vite qu'un polynome) :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

En principe la transformée de Laplace peut se définir pour des fonctions à variables complexes $(p = \beta + i\xi)$ *mais dans ce qui suit nous n'aurons pas besoin de cette généralisation et nous nous contenterons de la*

transformée de Laplace dans $\mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{R}$). De même la définition d'une transformée de Laplace inverse se fait en "passant" dans le plan complexe (en utilisant la transormée de Fourier), cette transformation inverse ne nous sera pas utile dans notre cas. Par contre on rappellera un théorème utile pour la résolution des équations différentielles avec conditions initiales :
Théorème de la valeur initiale : Si f admet pour transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}f(p)$ alors non seulement on a $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$ mais encore :

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

Il existe en fait un théorème plus précis concernant le comportement asymptotique.
Théorème du comportement asymptotique : si la fonction f est développable au voisinage de $x = 0$ en série convergente de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

alors $\mathcal{L}(f)(p)$ possède le développement, pour $p \to \infty$:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{k!}{p^{k+1}}$$

2.3.2 Quelques propriétés importantes

a) Montrer les relations suivantes :

$$\mathcal{L}(\frac{df}{dx}) = -f(0^+) + p\mathcal{L}(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\frac{d^2f}{dx^2}) = -f'(0^+) - pf(0^+) + p^2\mathcal{L}(f)$$

b) Montrer la relation suivante :

$$\mathcal{L}(xf(x))(p) = -\frac{d\mathcal{L}(f)(p)}{dp}$$

2.3.3 Transformée de Laplace de la fonction de Bessel $J_0(x)$

Soit $Y_0(p) = \mathcal{L}(J_0)(p)$, montrer que $Y_0(p)$ vérifie l'équation différentielle :

$$(p^2+1)\frac{dY_0}{dp}(p) + pY_0(p) = 0$$

En utilisant le théorème de la valeur initiale montrer que

$$Y_0(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

2.3.4 Tranformée de Laplace inverse

a) En utilisant la formule “classique” valable pour $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Développez la tranformée de Laplace $\mathcal{L}(J_0)(p)$ en série de $1/p$.
b) Montrez que $\mathcal{L}(x^n)(p) = n!/p^{n+1}$
c) Retrouvez le développement en série entière (1).

2.3.5 Transformée de Laplace de la fonction de Bessel $J_n(x)$

On pose $Y_n(p) = \mathcal{L}(J_n))(p)$. Montrer en utilisant l’équation différentielle 1 et les propriétés de la transformée de Laplace que Y_n vérifie l’équation différentielle :

$$(p^2+1)\frac{d^2Y_n}{dp^2} + 3p\frac{dY_n}{dp} + (1-n^2)Y_n = 0$$

Effectuer le changement de variable $p = \sinh u$ et de fonction $Y_n \cosh u = g_n$, et montrer que

$$\frac{d^2g_n}{du^2} - n^2 g_n = 0$$

Montrer que les solutions s’écrivent

$$Y_n(p) = \frac{A_n(p+\sqrt{p^2+2})^n + B_n(p+\sqrt{p^2+2})^{-n}}{\sqrt{p^2+1}}$$

Utilisez les théorèmes de la valeur initiale et du comportement asymptotique pour démontrer que $A_n = 0$ et $B_n = 1$ et donc que :

$$Y_n(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^n}$$

3 Quelques résultats sur la fonction génératice des fonctions de Bessel

On considère la fonction de deux variables :

$$g(x,t) = e^{x/2(t-1/t)}$$

Le développement en série de Laurent de g par rapport à la variable t conduit à :

$$e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n$$

Le coefficient de t^n, $J_n(x)$ est défini comme étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. Si on effectue le développement du produit des deux exponentielles on obtient :

$$e^{xt/2} e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

Pour un s donné on obtient un coefficient t^n pour $r = n+s$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

D'où le coefficient de t^n :

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

On reconnait le développement de $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Cette fonction génératrice est très utile, notamment pour démontrer de nombreuses relations de récurrences qui existent sur les fonctions de Bessel, par exemple le résultat :

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$