

Tutorat no 3 Calcul variationnel et application aux parois magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques

Résumé

Le magnétisme est un domaine très vaste en plein essor actuellement avec le développement de l'électronique de spin. Dans tout matériau ferromagnétique il existe des défauts qui ont une forte influence sur les propriétés physiques (aimantation, conductivité etc..). Dans ce tutorat nous abordons un type de défaut très courant : la paroi de Bloch. Après avoir montré comment obtenir un modèle "continu" à partir du modèle discret de Heisenberg, nous déterminons la configuration magnétique au niveau de la paroi ainsi que son énergie. Dans une dernière partie nous montrons l'analogie qui existe entre paroi de Bloch et mécanique.

1 Modèle d'Heisenberg et passage au continu

Soit un système de spins en interaction. Le spin d'un site i étant caractérisé par un vecteur $\mathbf{S}_i = S\mathbf{u}_i$ de norme constante S et d'orientation portée par le vecteur unitaire \mathbf{u}_i . L'énergie du système s'écrit :

$$E = - \sum_{\langle ij \rangle} JS_i \cdot S_j$$

où J est une constante positive appelée intégrale d'échange. Le signe $\langle ij \rangle$ signifiant que la sommation s'effectue sur les atomes premiers voisins uniquement. Il est clair que pour un système de ce type la configuration d'énergie minimum est celle pour laquelle tous les spins sont alignés. C'est ce que l'on appelle un système ferromagnétique.

1.1 Chaîne linéaire de spins en interaction.

On considère une chaîne linéaire de spins interagissant selon un modèle de Heisenberg. Montrez que l'énergie du système se met sous la forme :

$$E = -JS^2 \sum_i \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{u}_{i+1})$$

On s'intéresse au cas où tous les vecteurs \mathbf{u}_i sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe de la chaîne et sont caractérisés par l'angle θ_i qu'il font avec l'axe des x (voir figure :1). Montrez alors qu'au second ordre en angle l'énergie s'écrit :

$$E = E^0 + \frac{JS^2}{2} \sum_i [(\theta_i - \theta_{i+1})^2 + (\theta_i - \theta_{i-1})^2]$$

E^0 étant l'énergie d'un système où tous les spins sont alignés. Le second terme correspondant au coût énergétique supplémentaire par rapport à la situation ferromagnétique pure.

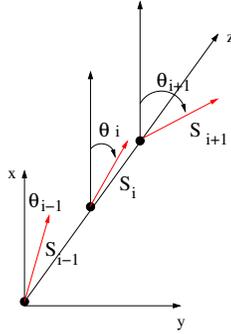


FIG. 1 – Représentation schématique d'une chaîne linéaire de Heisenberg.

1.2 Paroi de Bloch

On considère la situation où le système passe d'une configuration où tous les spins sont alignés en faisant un angle $-\pi/2$ pour $z = -\infty$ à une configuration opposée où tous les spins sont alignés en faisant un angle $\pi/2$ pour $z = +\infty$ (voir figure 2). On appelle ce type de défaut une paroi de Bloch.

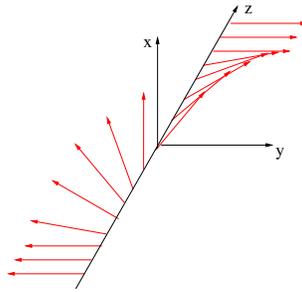


FIG. 2 – Représentation schématique d'une paroi de Bloch.

Supposons que ce passage se fasse sur une longueur de $\xi = Na$, deux spins consécutifs étant décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle π/N . Quel est le coût énergétique de cette paroi ? Montrez qu'elle tend vers zéro quand la largeur de la paroi ξ tend vers l'infini. Dans un tel système les parois ont donc tendance à être infiniment large.

1.3 Energie d'anisotropie

Dans un système réel il existe une contribution énergétique appelée énergie d'anisotropie E_{an} (étroitement liée au couplage spin-orbite) qui a tendance à aligner les spins le long de certaines directions de haute symétrie. On considère le cas où E_{an}^i sur le site i prend la forme simple :

$$E_{an}^i = \kappa \cos^2 \theta_i \quad \kappa > 0$$

Les orientations $\theta = \pm\pi/2$ (+y et -y) sont alors favorisés on les appelle directions de facile aimantation tandis que les directions de plus haute énergie +x et -x sont des directions de difficile aimantation.

1.4 Passage au continu

On s'intéresse aux situations où les spins varient faiblement dans l'espace c'est à dire que l'angle θ_i varie peu d'un site au site voisin. On va donc considérer θ comme une variable continue $\theta_i = \theta(z = ia)$. Montrer que l'énergie du système peut se mettre sous la forme intégrale :

$$E = E^0 + \int_{-\infty}^{+\infty} [JS^2a \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + \frac{\kappa}{a} \cos^2 \theta] dz$$

1.5 Système cubique tridimensionnel

Un cas plus réaliste que la chaîne linéaire est celui d'un réseau cubique tridimensionnel dont les configurations de spin varient le long d'un axe z correspondant à un des axes du cube. Le système peut en fait se ramener à un cas unidimensionnel car tous les spins appartenant à un même plan de cote z (perpendiculaire à l'axe z) sont dans une configuration identique caractérisé par un angle $\theta(z)$.

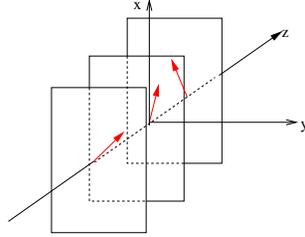


FIG. 3 – Représentation schématique d'un système cubique de Heisenberg pour lequel la variation des configurations de spins se fait le long d'un axe z .

Montrer que l'énergie par unité de surface d'un tel système s'écrit :

$$E_s = E_s^0 + \int_{-\infty}^{+\infty} [A \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + g(\theta)] dz \quad (1)$$

Avec $A = \frac{JS^2}{a}$ et $g(\theta) = \kappa' \cos^2 \theta$ où $\kappa' = \frac{\kappa}{a^3}$

2 Parois de Bloch

La paroi de Bloch est caractérisée par un plan Π et un axe z perpendiculaire à Π . Infiniment loin de la paroi les spins sont alignés le long de la direction de facile aimantation : $-y$ ($\theta = -\pi/2$) pour $z \rightarrow -\infty$ et $+y$ ($\theta = \pi/2$) pour $z \rightarrow +\infty$.

2.1 Problème variationnel

La détermination du profil se obtient en cherchant le minimum de l'intégrale (1). Appliquer le principe variationnel pour démontrer que :

$$g(\theta) - A \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \text{constante} \quad (2)$$

Montrez que la constante est nulle.

2.2 Profil et largeur de la paroi

Intégrez le système différentiel (2) et montrez que ¹ :

$$\theta(z) = \arcsin\left[\tanh\left(\frac{\pi z}{\delta}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \delta = \pi\sqrt{\frac{A}{\kappa'}}$$

Tracez la fonction $\arcsin[\tanh(z')]$ ² et vérifiez que δ caractérise la largeur de la paroi de Bloch.

2.3 Energie de la paroi

Utilisez la relation (2) pour démontrer que l'énergie de la paroi (par unité de surface) est donnée par :

$$E_s = 4\sqrt{A\kappa'}$$

2.4 discussion physique

Discuter du comportement de l'énergie et de la largeur de la paroi en fonction des paramètres de notre modèle. Quelle est la limite de validité du modèle continu ?

3 Analogie mécanique

3.1 Mécanique Lagrangienne

La mécanique peut se formuler sous forme variationnelle en introduisant un Lagrangien :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x, t)$$

On doit alors optimiser l'action :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Montrer que si le potentiel est indépendant de la variable t alors :

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \text{constante}$$

3.2 Analogie

Montrer l'analogie qui existe entre la paroi de Bloch et le mouvement d'une particule de masse m partant avec une vitesse nulle au temps $t = -\infty$ et se déplaçant dans un puits de potentiel $V(x)$ attractif comme indiqué sur la figure (4).

¹On rappelle la formule d'intégration $\int_0^\theta \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

²Remarquons l'égalité des fonctions suivantes : $\arcsin(\tanh(z)) = 2 \arctan(\tanh(z/2)) = 2 \arctan(e^z) - \pi/2$

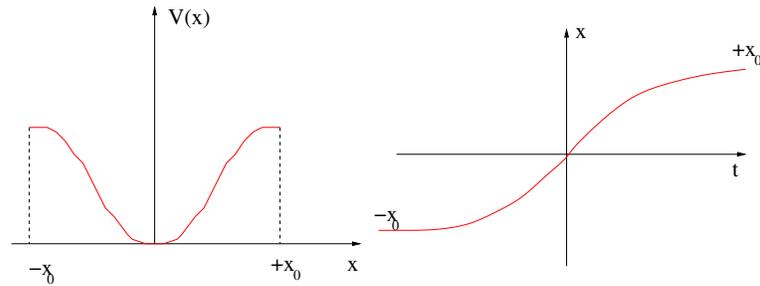


FIG. 4 – Puits de potentiel et représentation schématique de la trajectoire $x(t)$ solution.

3.3 Puits de potentiel quadratique et solution analytique

On a vu dans la section sur les parois de Bloch qu'un potentiel en $-\cos^2(x)$ avait une solution analytique. Nous allons à présent considérer un potentiel de la forme :

$$V(x) = -\frac{u}{4}(x^2 - x_0^2)^2 \quad \text{pour } |x| < x_0$$

Montrer que la solution est ³ :

$$x = x_0 \tanh\left(\frac{t}{t_w}\right) \quad \text{avec } t_w = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{2m}{u}}$$

3.4 Double puits

A votre avis quelle sera l'allure de la solution pour un double puits tel que celui représenté sur le schéma ci-dessous (5).

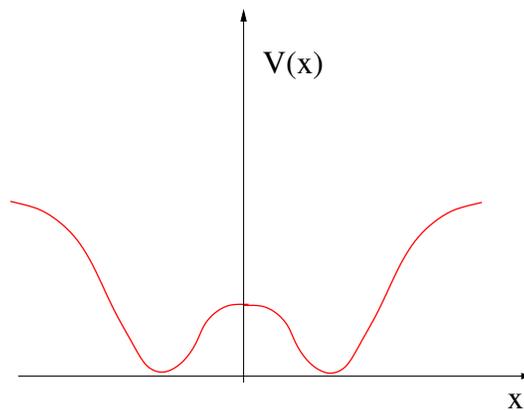


FIG. 5 – Double puits de potentiel

³On rappelle la formule d'intégration $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Argth}\left(\frac{x}{a}\right)$

4 Le magnétisme d'un système réel

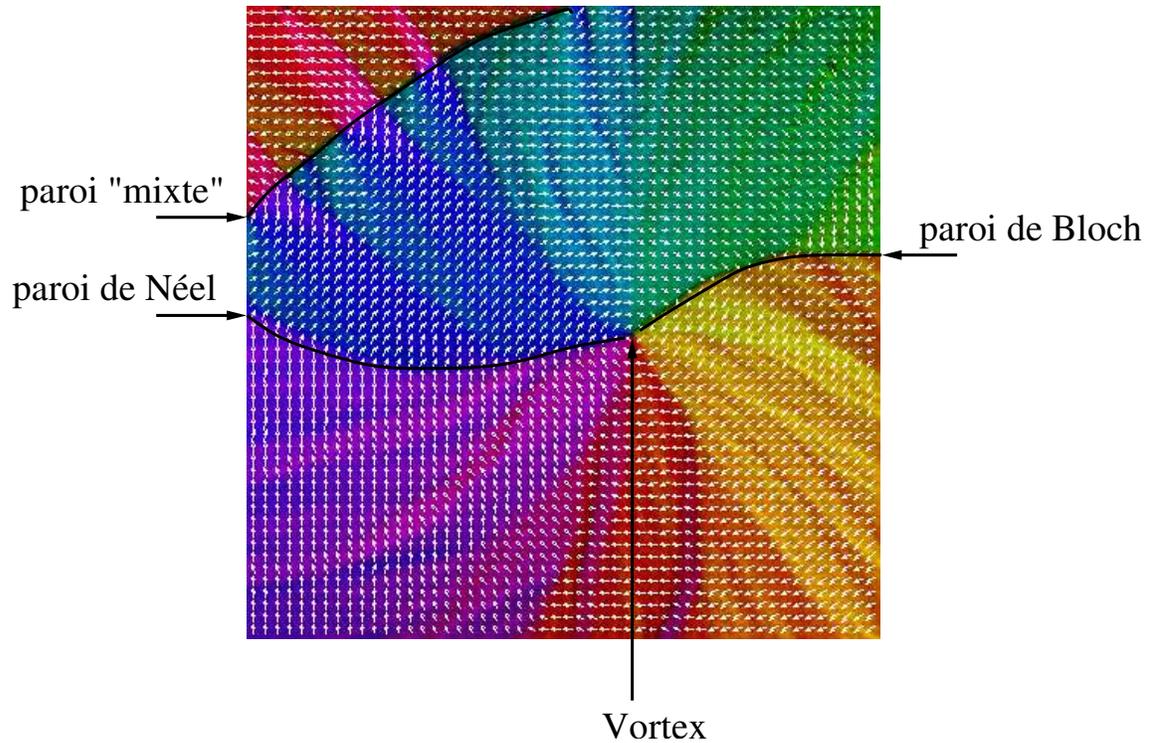


FIG. 6 – Image ($100\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$) en microscopie Lorentz du système $\text{Co}_{30\%}\text{Fe}_{70\%}$ (cfc). On peut observer différents types de défauts, un vortex au centre, une paroi de Bloch, une paroi de Néel, ainsi qu'une paroi mixte qui alterne Bloch et Néel. Image prise avec le microscope du CEA Grenoble et fournie par Ana Ramos, effectuant sa thèse au CEA Saclay (SPCSI).