

Tutorat no 3 Méthode du col

Résumé

Les fonctions à variables complexes ont de multiples applications en physique (voir tutorat no 2) mais elles sont aussi extrêmement utiles dans le calcul d'intégrales immondes ou de sommes effrayantes. Dans ce tutorat nous allons utiliser les propriétés des fonctions holomorphes pour démontrer une méthode permettant d'obtenir le développement asymptotique d'intégrales complexes de la forme

$$I(\lambda) = \int_C h(z)e^{\lambda f(z)} dz$$

dans la limite où $\lambda \in \mathbb{R}$ tend vers l'infini. Dans une première partie nous présentons la version réelle de ce développement asymptotique que nous appliquerons pour retrouver la fameuse formule de Stirling. La deuxième partie porte sur la démonstration de la méthode du col à l'aide de résultats obtenus dans le tutorat no 2 que nous rappellerons. Enfin dans la troisième partie nous appliquerons la méthode du col pour obtenir le développement asymptotique des fonctions de Bessel.

1 La méthode du col réel (méthode de Laplace)

On s'intéresse au comportement asymptotique ($\lambda \rightarrow \infty$) d'intégrales de fonctions réelles du type :

$$I(\lambda) = \int_a^b h(t)e^{\lambda f(t)} dt$$

- A votre avis quelles sont les régions de l'axe $[a, b]$ qui vont contribuer de manière dominante au comportement de $I(\lambda)$.
- On suppose que la fonction $f(t)$ admet un maximum en un point c intérieur à l'intervalle $[a, b]$ tel que $f''(c) < 0$.

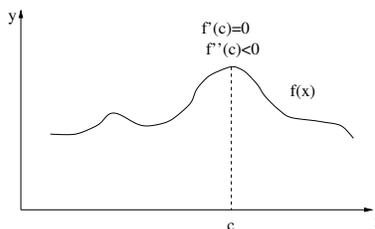


FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction f

On considère le cas où $h(c) \neq 0$. On s'attend à ce que pour les grands λ le comportement asymptotique de $I(\lambda)$ soit donné par l'intégrale :

$$\int_{c-R}^{c+R} h(c) e^{\lambda[f(c) + \frac{(t-c)^2}{2} f''(c)]} dt$$

Où R est un réel petit mais fini. Montrer alors que :

$$I(\lambda) \approx \frac{h(c) e^{\lambda f(c)}}{\sqrt{-\frac{\lambda}{2} f''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

c) Montrez que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$$

d) En déduire la formule de Laplace :

$$\int_a^b h(t) e^{\lambda f(t)} dt \approx e^{\lambda f(c)} h(c) \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda f''(c)}} \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

Montrer que ce résultat est toujours valable si la fonction h est complexe.

e) On considère l'intégrale suivante qui définit la fonction Γ :

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\lambda dt$$

Effectuez le changement de variable $t = \lambda(u + 1)$ et utiliser la méthode de Laplace pour démontrer le comportement asymptotique de la fonction Γ (formule de Stirling)

$$\Gamma(\lambda + 1) \approx e^{-\lambda} \lambda^\lambda \sqrt{2\pi\lambda} \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

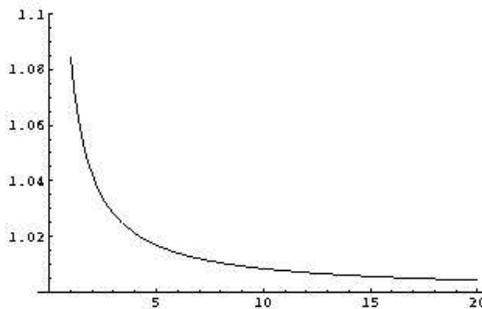


FIG. 2 – Représentation graphique de la fonction $\frac{\Gamma(1+x)}{e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}}$

2 la méthode du col dans le plan complexe

La méthode du col est une généralisation de la méthode de Laplace dans le plan complexe.

On cherche une formule asymptotique d'intégrales du type

$$I(\lambda) = \int_C h(z) e^{\lambda f(z)} dz$$

Où C désigne un chemin dans le plan et λ est un réel tendant vers l'infini. Si f est analytique dans un ouvert Ω alors l'intégrale $I(\lambda)$ ne dépend pas du chemin C . Le "jeu" est alors de bien choisir C .

2.1 Quelques rappels sur la géométrie des fonctions analytiques (tutorat no 2)

Dans le tutorat no 2, nous avons démontré plusieurs résultats importants sur les propriétés géométriques des fonctions holomorphes. Nous en rappelons ici les éléments essentiels

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable $z = x + iy$. On écrit f sous la forme : $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- i) Les lignes de niveau de u et v sont orthogonales.
- ii) La partie imaginaire de f est constante sur la ligne de plus grande pente de la partie réelle (et réciproquement).
- iii) u ne peut admettre de maximum (ou minimum) dans son domaine intérieur. Les points singuliers sont nécessairement des points cols.
- iv) Soit z_0 est un point singulier de f ($f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) \neq 0$). L'angle θ de la ligne de plus grande pente de u (passant par z_0) avec l'axe des x , vérifie la relation $2\theta + \alpha = \pi[2\pi]$ où α est la phase de $f''(z_0)$.

2.2 Choix du bon chemin

- a) A votre avis quelles sont les régions du chemin C qui vont dominer le comportement de $I(\lambda)$.
- b) Soit z_0 un point tel que $f'(z_0) = 0$. Comment choisir le chemin C qui va donner les valeurs dominantes de $\exp(\lambda f(z))$. Comment se comporte la partie imaginaire $v = \text{Im}\{f\}$ le long de ce chemin ?
- c) On choisit comme chemin C la ligne de plus grande pente de la partie réelle de f . Montrer alors que l'on peut écrire $I(\lambda)$ sous la forme :

$$I(\lambda) = e^{i\lambda \text{Im}\{f(z_0)\}} \int_C h(z) e^{\lambda \text{Re}\{f(z)\}} dz$$

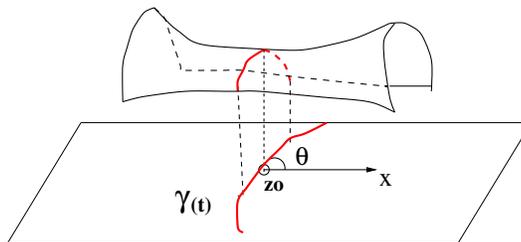


FIG. 3 – Col et ligne de plus grande pente

Soit $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ($t \in [a, b]$) une équation paramétrique de la ligne de plus grande pente passant par $z_0 = \gamma(t_0)$. Par commodité on pose $f(t) = f(\gamma(t))$, $u(t) = u(\gamma(t))$, $v(t) = v(\gamma(t))$ et $h(t) = h(\gamma(t))$. Le problème se ramène donc à l'estimation asymptotique de l'intégrale :

$$\int_a^b h(t)e^{\lambda u(t)} \gamma'(t) dt$$

2.3 Retour au réel : utilisation de la méthode de Laplace

a) On suppose que la dérivée seconde de f en z_0 est non nulle $f''(z_0) \neq 0$ et $h(z_0) \neq 0$. En utilisant la méthode de Laplace montrer que l'intégrale $I(\lambda)$ a pour développement asymptotique :

$$I(\lambda) \approx h(z_0) \gamma'(t_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{\frac{d^2 u}{dt^2}(t_0)}} \frac{e^{\lambda f(z_0)}}{\sqrt{\lambda}}$$

b) Ecrire la dérivée seconde de $f(t) = f(\gamma(t))$ par rapport à t et montrer qu'au point critique on a :

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t_0) = \gamma'^2(t_0) f''(z_0)$$

Montrer que la dérivée seconde $\frac{d^2 f}{dt^2}(t_0)$ est nécessairement réelle et négative. En déduire que

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t_0) = -|f''(z_0)| |\gamma'(t_0)|^2$$

c) On définit l'angle θ entre la courbe γ et l'axe des x (voir figure) au point critique. Montrer que :

$$\gamma'(t_0) = |\gamma'(t_0)| e^{i\theta}$$

on écrit $f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i\alpha}$, en déduire que : $\theta = (\pi - \alpha)/2$ ou $\theta = (\pi - \alpha)/2 + \pi$ selon le sens de parcours de la courbe.

d) En déduire la formule asymptotique de $I(\lambda)$:

$$I(\lambda) \approx \pm h(z_0) e^{\lambda f(z_0)} e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} = \pm h(z_0) e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(z_0)}}$$

Le signe \pm étant donné par le sens de parcours de la ligne de plus grande pente.

3 Comportement asymptotique des fonctions de Bessel (optionel)

On considère la fonction $J_n(x)$, appelée fonction de Bessel d'ordre n :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta$$

a) Montrer que la fonction $J_n(x)$ peut aussi s'écrire :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

b) On commence par étudier la fonction $J_0(x)$. Par changement de variable $\theta' = \theta - \pi/2$ on peut écrire

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$$

Montrer que $J_0(x)$ peut être transformée en :

$$J_0(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i\pi} \int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} e^{ix \cosh z} dz \right] \quad \text{où} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Où z suit la droite entre $-i\pi/2$ et $i\pi/2$.

c) Montrer que l'on peut étendre le chemin à l'infini en rajoutant deux contributions (convergentes !) qui sont imaginaires pures :

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty - i\pi/2}^{-i\pi/2} e^{ix \cosh z} dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{i\pi} \int_{i\pi/2}^{+\infty + i\pi/2} e^{ix \cosh z} dz$$

En déduire que $J_0(x)$ peut s'écrire comme une intégrale sur un chemin C_0 représenté sur la figure (4) :

$$J_0(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i\pi} \int_{C_0} e^{ix \cosh z} dz \right]$$

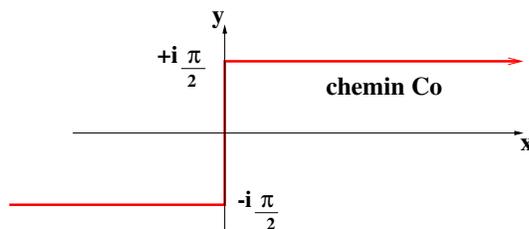


FIG. 4 – Chemin C_0

d) Les fonctions considérées étant analytiques sur \mathbb{C} tout entier on peut déformer le chemin à volonté entre $-\infty - i\pi/2$ et $+\infty + i\pi/2$ (appelé chemin de Sommerfeld : Fig. 5).

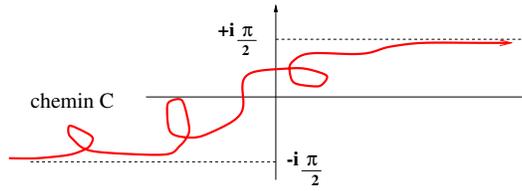


FIG. 5 – Chemin de Sommerfeld quelconque

On cherche la courbe de plus grande pente de la fonction $f(z) = i \cosh z$ passant par $z = 0$. Posez $z = x + iy$ et utilisez la relation $\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ pour montrer que cette courbe vérifie :

$$\cosh x \cos y = 1$$

Il existe deux courbes $y = g(x)$ vérifiant la relation précédente. Tracer ces deux courbes, quel angle font-elles à leur point de croisement. Laquelle de ces deux courbes donne un maximum de la partie réelle de $f(z)$ en $z = 0$?

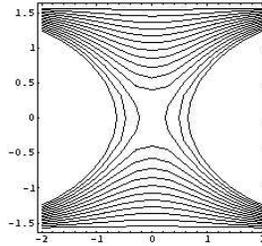


FIG. 6 – Lignes de niveau de la partie réelle de $i \cosh z$

e) Appliquer la méthode du col et montrer que le comportement asymptotique de $J_0(x)$ est donné par :

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

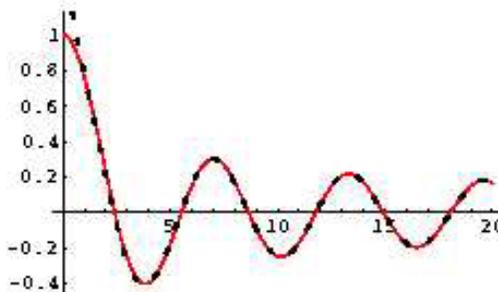


FIG. 7 – Fonction de Bessel $J_0(x)$ et son approximation $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) Faire la même étude pour la fonction de Bessel d'ordre n et montrer la formule asymptotique :

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$