

Tutorat no 2

Propriétés géométriques des fonctions analytiques

Résumé

Les fonctions holomorphes (ou analytiques) ont des applications dans de très nombreux domaines, parfois inattendus. Dans ce tutorat nous allons étudier quelques propriétés géométriques des fonctions analytiques qui nous serviront dans le tutorat no 3 sur la méthode du col. Nous montrons également le lien qui existe entre les fonctions analytiques et la forme des films de savon (ou de caoutchouc). En effet les films de savons ont une propriété géométrique tout à fait particulière : leur courbure moyenne est nulle (on les appelle des surfaces minimales). Or il existe une connection très étroite entre les surfaces minimales et les fonctions holomorphes, en effet le théorème de Weierstrass-Enneper montre que toute fonction holomorphe permet de définir par une intégrale complexe, une surface minimale.

1 Lignes de niveau des parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe

1.1 Rappels de calcul différentiel : interprétation géométrique du gradient

a) développement au premier ordre

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ un point tel que $\text{grad } g(\mathbf{a}) \neq 0$ et $d\mathbf{r}$ un petit "déplacement" autour du point \mathbf{a} . Montrez que

$$g(\mathbf{a} + d\mathbf{r}) \simeq g(\mathbf{a}) + \text{grad } g \cdot d\mathbf{r}$$

b) lignes de niveau

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note C_λ la courbe de niveau d'équation $g(\mathbf{x}) = \lambda$. Soit \mathbf{a} un point tel que $\text{grad } g(\mathbf{a}) \neq 0$. Montrer que le gradient est perpendiculaire à la ligne de niveau et que $\text{grad } g(\mathbf{a})$ correspond à la ligne de plus grande pente de la fonction g passant par \mathbf{a} , c'est à dire selon laquelle la fonction $g(x, y)$ varie le plus rapidement

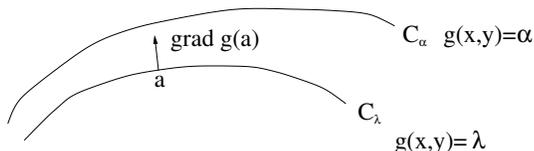


FIG. 1 – Lignes de niveau et gradient.

1.2 Parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe

Soit f une fonction analytique de la variable $w = x + iy$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$:

$$f(w) = u(x, y) + iv(x, y)$$

On notera $f'(w)$, $f''(w)$ les dérivées premières et secondes par rapport à la variable complexe w .

1) Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann sur u et v .

2) Montrer que les lignes de niveau de la partie imaginaire v sont orthogonales à celles de la partie réelle u (utiliser Cauchy Riemann).

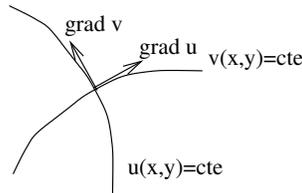


FIG. 2 – Lignes de niveau de la partie réelle et imaginaire d’une fonction holomorphe.

En déduire que la partie imaginaire de f est constante sur la ligne de plus grande pente de la partie réelle de f .

2 Quelques rappels sur le comportement d’une fonction au voisinage d’un point singulier

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On appelle point singulier de g un point $\mathbf{a}_0 = (x_0, y_0)$ tel que $\text{grad } g(\mathbf{a}_0) = 0$. On définit la matrice des dérivées secondes $D^2g(\mathbf{a}_0)$ (la matrice Hessienne) au point \mathbf{a}_0 par :

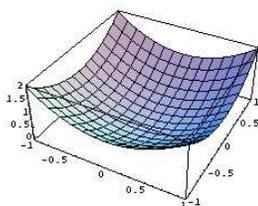
$$D^2g(\mathbf{a}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

On suppose que la matrice Hessienne en \mathbf{a}_0 est non nulle, montrez en utilisant le développement de Taylor au second ordre que :

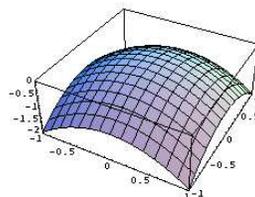
$$g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{dr}) \simeq g(\mathbf{a}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{dr} \cdot [D^2g(\mathbf{a}_0)] \mathbf{dr}$$

De même que le comportement local d’une fonction à une variable réelle, autour d’un point où sa dérivée s’annule est donné par le signe de sa dérivée seconde en ce point, le comportement d’une fonction à plusieurs variables est donné par sa matrice Hessienne. Montrez que g présente

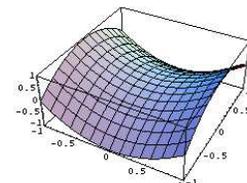
- i) un minimum si $D^2g(\mathbf{a}_0)$ est définie positive (2 valeurs propres positives)
- ii) un maximum si $D^2g(\mathbf{a}_0)$ est définie négative (2 valeurs propres négatives)
- iii) un col si $D^2g(\mathbf{a}_0)$ possède une valeur propre négative et l’autre positive.



mimimum



maximum



col

3 Théorème de la moyenne et principe du maximum

3.1 Théorème de la moyenne

Utiliser la formule intégrale de Cauchy appliquée à $f(w)$ pour montrer qu'en tout point $w_0 = x_0 + iy_0$ de Ω :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta$$

pour tout $r > 0$ tel que le cercle de centre w_0 et de rayon r soit contenu dans Ω . Ce résultat s'appelle le **théorème de la moyenne**.

3.2 Principe du maximum

Utiliser le théorème de la moyenne pour montrer que u ne peut admettre de maximum ou minimum local en tout point de Ω . On raisonnera par l'absurde en supposant que u admet un extremum et l'on montrera en utilisant la formule de la moyenne que c'est impossible. Qu'en est-il de v ?

Ce résultat constitue le principe du maximum, qui signifie que la surface représentée par $z = u(x, y)$ ne possède jamais de maximum à l'intérieur de son domaine d'existence. Les seuls extremas possibles se situent sur les bords de son domaine d'existence.

3.3 Point selle

On vient de voir que la partie réelle et imaginaire de f ne peuvent avoir de maximum, en revanche cela ne l'empêche pas d'avoir des points singuliers pour lesquels $f'(w_0) = 0$. Montrer qu'en ce point le gradient de u (et de v) est nul et que ce point est nécessairement un point selle (aussi appelé col) de la fonction $u(x, y)$ (et $v(x, y)$).

4 lignes de niveau autour d'un point singulier

4.1 Col et ligne de plus grande pente

Soit une fonction de deux variables $g(x, y)$ possédant un point singulier en x_0, y_0 de type "col". On définit une ligne particulière passant par le col telle que chaque point de cette ligne suive la ligne de plus grande pente admettant un maximum au col (le chemin le plus efficace pour passer d'une vallée à l'autre) comme illustré sur la figure 3.

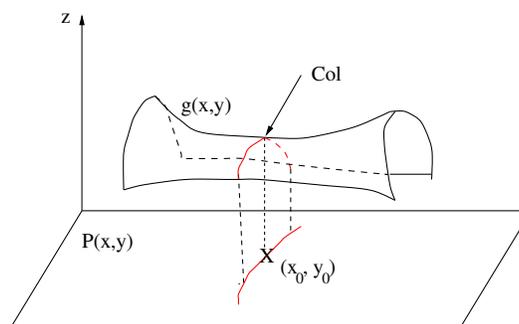


FIG. 3 – Ligne de plus grande pente passant par le col.

4.2 Lignes de niveau de la fonction w^2

On considère la fonction $w \rightarrow w^2$: montrer que les lignes de niveaux $u(x,y) = cte$ et $v(x,y) = cte$ forment des hyperboles (orthogonales) centrées sur le point singulier $w = 0$. Montrer que la ligne de plus grande pente de u passant par $w = 0$ (possédant un maximum en O) est la droite $x = 0$. Que vaut la partie imaginaire v le long de cette ligne de plus grande pente ?

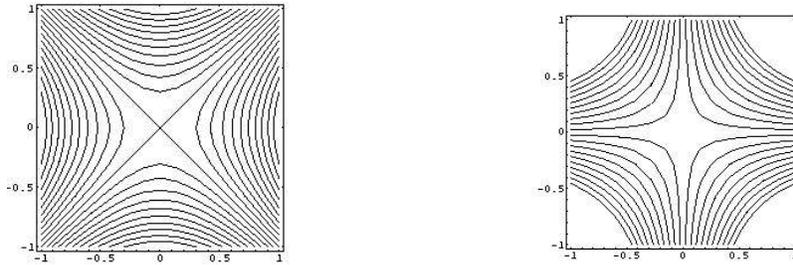


FIG. 4 – Lignes de niveau de la partie réelle (gauche) et imaginaire (droite) de w^2 autour du centre

4.3 Cas général

Soit $f(w)$ une fonction possédant un point singulier en w_0 , ($f'(w_0) = 0, f''(w_0) \neq 0$) On développe $f(w)$ au second ordre autour de w_0 :

$$f(w) = f(w_0) + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 f''(w_0)$$

On pose $f''(w_0) = a + ib$, calculez la matrice Hessienne de la partie réelle et imaginaire de f au point $w = w_0$. Montrez que les deux valeurs propres des matrices Hessiennes sont $\pm \|f''(w_0)\|$.

On pose $f''(w_0) = \rho e^{i\alpha}$ et $w - w_0 = r e^{i\theta}$. Ecrire la partie réelle et imaginaire de $f(w) - f(w_0)$. Montrer que l'angle θ que fait la ligne de plus grande pente (possédant un maximum en w_0) avec l'axe réel est relié à l'angle α par la relation $2\theta + \alpha = \pi$.

Que vaut la fonction v le long de la ligne de plus grande pente de u passant par $w_0 = (x_0, y_0)$?

5 Films de savons et quelques “rappels” sur la géométrie des surfaces

Vous avez tous fait dans votre jeunesse des bulles de savon qui adoptent à l'équilibre une forme parfaitement sphérique. Cependant pour former cette bulle il vous faut utiliser un cadre généralement circulaire et planaire. Vous pouvez faire l'expérience de déformer légèrement le cadre et admirer ainsi la forme du film de savon. La surface obtenue ne présente aucun extremum mais peut en revanche avoir des points singuliers, un peu comme la partie réelle d'une fonction analytique. Nous allons essayer de préciser cette analogie.

Vous connaissez sans doute l'équation de Laplace-Young qui relie le rayon R d'une bulle de savon à la différence de pression δP entre l'intérieur et l'extérieur :

$$\delta P = \frac{2\sigma}{R}$$

Où σ est la tension superficielle de la bulle. Dans le cas d'une bulle qui n'est pas sphérique on montre que la formule se généralise de la façon suivante :

$$\delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure dans deux directions orthogonales de la surface du film. Nous avons illustré cette notion de rayon de courbure sur la figure (5).

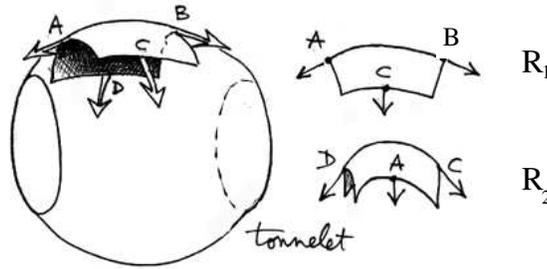


FIG. 5 – Illustration des rayons de courbures R_1 et R_2 d'une surface.

Si la bulle n'est pas fermée, c'est un film étiré reposant sur un cadre de forme quelconque, la différence de pression s'annule et l'on trouve la propriété caractéristique des films de savons : la courbure moyenne $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est nulle en tout point du film. Ces surfaces sont appelées surfaces minimales. On montre en géométrie différentielle qu'une surface paramétrée sous la forme : $\mathbf{X} = (g_1(\alpha, \beta), g_2(\alpha, \beta), g_3(\alpha, \beta))$ a une courbure moyenne H s'écrivant :

$$H = \frac{En - 2Fm + Gl}{2(EG - F^2)}$$

avec $E = \mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{X}_\alpha$, $F = \mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{X}_\beta$, $G = \mathbf{X}_\beta \cdot \mathbf{X}_\beta$, $l = \mathbf{X}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}$, $m = \mathbf{X}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{N}$, $n = \mathbf{X}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{N}$

\mathbf{N} étant la normale à la surface. Par convention les indices α et β désignent les dérivés partielles première par rapport à α et β et le double indice du type $\alpha\beta$ les dérivés partielles secondes.

Montrez que pour une surface paramétrée sous la forme $\mathbf{X} = (x, y, z = g(x, y))$, la courbure moyenne s'écrit :

$$H = \frac{g_{xx}(1 + g_y^2) - 2g_x g_y g_{xy} + g_{yy}(1 + g_x^2)}{2(1 + g_x^2 + g_y^2)^{3/2}}$$

En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par une surface minimale.

6 Fonctions holomorphes et surfaces minimales : Théorème de Weierstrass-Enneper

Soit f une holomorphe sur un domaine \mathcal{D} , $\xi = (\alpha + i\beta)$ un point variable de ce domaine et ξ_0 un point fixe arbitraire (que l'on pourra prendre nul). On peut montrer (Théorème de Weierstrass-Enneper) que la surface définie de la manière suivante est une surface minimale :

$$x(\alpha, \beta) = \Re \left[\int_{\xi_0}^{\xi} (1 - w^2) f(w) dw \right], \quad y(\alpha, \beta) = \Re \left[i \int_{\xi_0}^{\xi} (1 + w^2) f(w) dw \right], \quad z(\alpha, \beta) = 2 \Re \left[\int_{\xi_0}^{\xi} w f(w) dw \right]$$

\Re désignant la partie réelle. Ce résultat (que nous ne démontrons pas) nous dit que toute fonction holomorphe permet de définir une surface minimale. Nous allons le vérifier sur le cas particulier $f = 1/(2w^2)$.

Montrez que :

$$x = -\Re \left[\frac{1}{2\xi} + \frac{\xi}{2} \right], \quad y = -\Re \left[i \left[\frac{1}{2\xi} - \frac{\xi}{2} \right] \right], \quad z = \Re[\ln \xi]$$

On fait le changement de variable suivant $\xi = e^{u+iv}$. Montrer que la paramétrisation de la surface est alors donnée par :

$$(-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u)$$

Vérifiez que cette surface est bien minimale. Cette surface est la caténoïde (Fig. 6) de révolution que vous verrez en deuxième année dans le cadre du calcul variationnel. Il existe un lien très étroit entre les surfaces minimales et les surfaces qui minimisent leur aire totale (d'où le calcul variationnel), car toute surface qui minimise son aire est une surface minimale (la réciproque est fautive). La caténoïde est la surface d'aire minimale qui relie deux cercles concentriques de même rayon, parallèles et centrés sur le même axe.

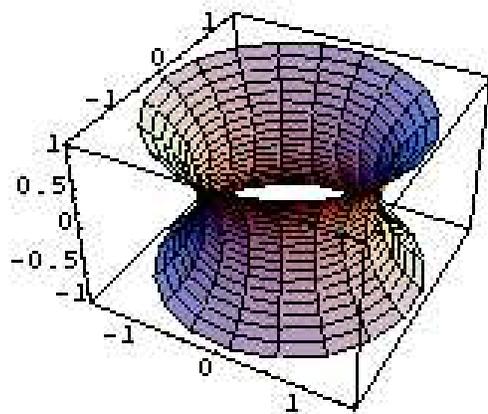


FIG. 6 – Caténoïde