ESPCI Première année Année 2003-2004
Méthodes Mathématiques
Cyrille Barreteau
cyrille.barreteau@cea.fr
http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php

Tutorat no 2
Ecoulement potentiel bidimensionnel et fonctions analytiques

Résumé

Dans ce tutorat nous allons montrer comment l'utilisation des fonctions à variable complexe permet de traiter de manière "élégante" les écoulements bidimensionnels irrotationnels autour d'un obstacle. Dans la première partie nous introduisons la fonction potentiel de vitesse ϕ et fonction courant ψ et montrons qu'elles permettent de définir une fonction analytique $f(z)$. Dans la deuxième partie nous étudions quelques fonctions $f(z)$ particulières correspondant à des écoulements présentant un intérêt physique : écoulement uniforme, écoulement tourbillonaire, écoulement "source". Enfin dans la troisième partie nous calculons l'effort exercé sur un obstacle immergé à l'aide du développement de Laurent de la vitesse complexe $w(z) = df/dz$.

1 Généralités

1.1 Quelques résultats sur les écoulements potentiels

Nous considérons dans tout ce problème un écoulement bidimensionnel stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible. Le champ de vitesse au point (x,y) sera noté :

$$\mathbf{V}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

On rappelle les équations d'Euler (en négligeant les forces de volume) :

$$div(\mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho\,\mathbf{grad}(\frac{\mathbf{V}^2}{2}) = -\mathbf{grad}(P) \quad (2)$$

ρ étant la masse volumique. Il convient d'ajouter la condition d'irrotationalité :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V}) = 0 \quad (3)$$

a) Montrer qu'il existe une fonction $\phi(x,y)$ potentiel des vitesses ($\mathbf{V} = \mathbf{grad}\phi$).

b) Vérifier que ϕ est solution de l'équation de Laplace ($\Delta\phi = 0$).

c) Montrer également qu'il existe une fonction ψ telle que :

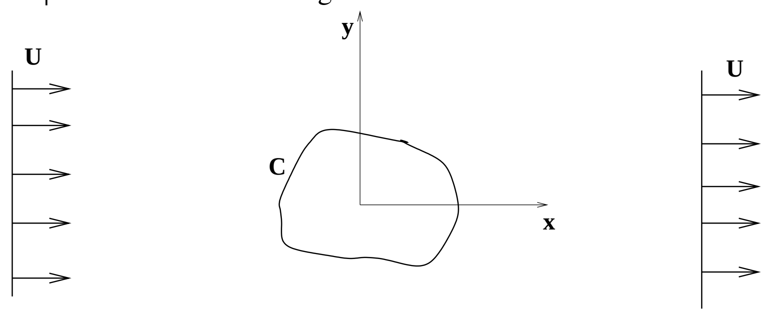
$$\boxed{u(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v(x,y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

En déduire que ϕ et ψ vérifient la condition de Cauchy-Riemann :

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

d)) Montrer que ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

e) Montrer que la fonction ψ est constante sur les lignes de courant. D'où son nom de fonction courant..



On impose que la vitesse à l'infini soit dirigée selon x.

f) Quelles sont les conditons aux limites à l'infini et sur l'objet immergé que doivent vérifier ϕ et ψ.

On voit donc que l'on a le choix entre deux approches. Le champ de vitesse peut être calculé soit à partir du potentiel vitesse soit à partir de la fonction courant, ces fonctions vérifiant toutes les deux l'équation de Laplace avec des conditions aux limites différentes (problème de Neumann). Nous allons montrer dans la suite que ces deux problèmes peuvent être résolus simultanément à l'aide des fonctions analytiques.

1.2 Utilisation des fonctions analytiques :

a) On introduit la fonction de variable complexe $f(z)$:

$$\boxed{f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad \text{avec} \quad z = x + iy}$$

Montrer que $f(z)$ est analytique.

b) Calculer $\boxed{w(z) = \frac{df}{dz}}$ en fonction des composantes de la vitesse.

c) Comment se traduisent sur $f(z)$ la condition aux limites à l'infini.

d) Vérifier que la circulation de la vitesse autour de l'objet immergé, désigné par $\mathcal{C}$, s'écrit :

$$\boxed{\oint_C \mathbf{V}.\mathbf{dl} = \oint_C w(z)dz}$$

2 Quelques écoulements particuliers

2.1 écoulement uniforme

Montrer que le potentiel $f(z) = Ue^{-i\alpha}z$ correspond à un écoulement uniforme de vitesse U faisant un angle α avec l'axe des x.

2.2 Puits et sources

Montrer que le potentiel complexe $f(z) = Q/(2\pi)log(z - z_0)$ correspond à un puits, ou à une source centré en z_0 selon le signe de Q. Les lignes de courant étant des droites semi-infinies émanant de z_0.

2.3 Tourbillon

Montrer que le potentiel $f(z) = -i\Gamma/(2\pi)log(z - z_0)$ correspond à un écoulement tourbillonaire ponctuel centré en z_0.

2.4 Dipole

On considère un “dipole” formé de la somme de deux écoulements : une source et un puits d’intensités respectives Q et $-Q$ disposés de part et d’autre de l’origine sur une droite formant un angle α avec x :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}[log(z - \varepsilon e^{i\alpha}) - log(z + \varepsilon e^{i\alpha})]$$

Faire tendre vers 0 la distance 2ε entre la source et le puits en maintenant le rapport $Q\varepsilon/\pi = \mu$ constant. Montrer que l’on a alors un potentiel :

$$f(z) = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{z}$$

2.5 Ecoulement autour d’un disque

On choisit un potentiel :

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z}$$

a) Montrer que si $\mu = Ua^2$ les lignes de courant $\psi = 0$ correspondent au cercle $|z| = a$.

b) Que vaut la circulation autour du cylindre et la vitesse à l’infini.

c) En quels points la vitesse est-elle nulle ?

2.6 Tourbillon autour d’un disque

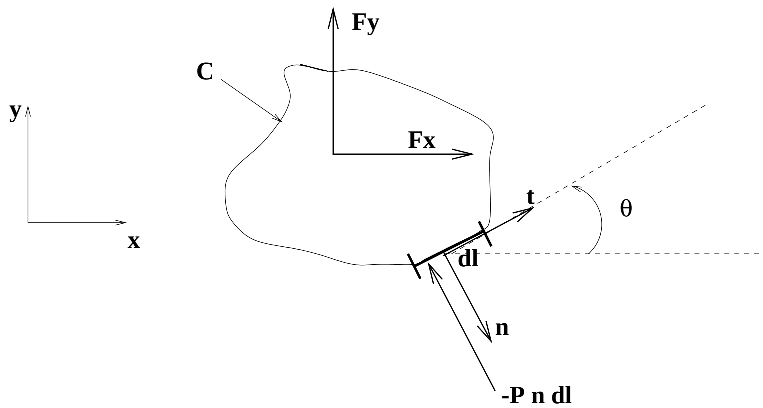
On choisit :

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}log(\frac{z}{a})$$

a) Vérifier que le cercle $|z| = a$ est une ligne de courant $\psi = 0$.

b) Circulation et vitesse à l’infini.

3 Effort exercé sur un obstacle immergé



3.1 Théorème de Blasius

On considère une cylindre $\mathcal{C}$ immergé, la résulante de la force exercée par unité de longueur suivant la troisième coordonnée s'écrit :

$$\mathbf{F} = -\oint_C P\mathbf{n}dl$$

On rappelle que la pression en un point est donnée par le théorème de Bernoulli $P = P_0 - \rho\mathbf{V}^2/2$ où P_0 est une constante. En utilisant ce résulat, vérifier que la force $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ exercée sur l'objet immergé est donnée par

$$\boxed{F_x - iF_y = \frac{i}{2}\rho\oint_C (w(z))^2 dz}$$

C'est le théorème de Blasius.

3.2 Théorème de Kutta-Joukovski

Choisissons l'origine des coordonnées à l'intérieur de l'objet immergé. $w(z)$ étant analytique à l'extérieur de l'objet, on peut la développer en série de Laurent à l'infini :

$$w(z) = U + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

Que vaut, en fonction de ces coefficients, la circulation Γ autour de l'objet ? Calculer la force exercée sur l'objet. Montrer qu'elle est dirigée suivant y, et vaut algébriquement $-\rho\Gamma U$. C'est le théorème de Kutta-Joukowski, qui est à la base de la théorie des ailes d'avion.