ESPCI Deuxième année Année 2005-2006
Méthodes Mathématiques
Cyrille Barreteau
cyrille.barreteau@cea.fr
http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php

Tutorat no 1
Introduction au calcul tensoriel et application à l'élasticité

Résumé

Il peut paraître évident que la description quantitative des phénomènes physiques ne peut pas dépendre du système de coordonées dans lequel ces phénomènes sont exprimés. Cependant on peut retourner l'argument : puisque les phénomènes physiques sont indépendants du système de coordonées, quelles sont les implications sur la nature des grandeurs impliquées dans la description de ces phénomènes. L'étude de ces implications et la classification des grandeurs physiques en fonction de ces implications constitue la théorie du calcul tensoriel. Dans ce tutorat nous introduirons quelques règles de calcul utilisées dans la manipulation des tenseurs et l'on montrera comment les tenseurs se transforment par changement d'axe.On appliquera ces résultats au cas de l'élasticité (mais aucune connaissance préalable n'est nécessaire).

1 Jeux d'écriture et règles de sommation d'Einstein

En algèbre vous avez appris à manipuler des vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et des matrices M de coefficients $\{M_{ij}\}$. Vous avez également fait agir une matrice M sur un vecteur $\vec{a}$ pour obtenir un vecteur $\vec{b}$ que vous notiez de manière compacte $\vec{b} = M\vec{a}$, ce qui signifiait au niveau des indices

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} a_j$$

Dans le calcul tensoriel on écrira tout simplement :

$$b_i = M_{ij} a_j$$

où par convention on sommera sur les indices répétés. Les indices répétés sont appelés indices muets et par conséquent on peut sans problème remplacer cet indice par un autre pourvu qu'il n'existe pas déjà dans l'expression considérée. Par contre les autres indices, dits indices libres, ne peuvent pas être remplacés par un autre indice sans modifier la signification de l'expression considérée. Cette convention est très utile mais il existe un cas où elle peut prêter à confusion : quand on souhaite désigner une grandeur particulière, comme l'élément diagonal d'un opérateur M_{ii}, si on ne souhaite pas faire de sommation il faudra le préciser explicitement (sinon on obtient la trace de la matrice M)

2 Transformation par changement d'axe

Le terme de tenseur ne désigne pas seulement une collection des quantités repérées par des indices. Il correspond aussi à une transformation bien précise dans les changements de coordonnées. Dans une rotation, un vecteur "tourne", un scalaire est inchangé etc.. Dans cette partie nous étudions la transformation des tenseurs et nous étudions quelques unes de ses propriétés.

2.1 Transformation isométrique

Soit R une matrice représentant une isométrie. On note R_{ij} ses composantes. Montrez que l'on a une isométrie si et seulement si :

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}$$

Rappelez quelles sont les deux valeurs possibles de $\det R$, et à quelles transformations elles correspondent.

2.2 Matrice de passage entre deux bases orthonormées

Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ une autre base orthonormée. Soit P la matrice de passage de $\vec{e}_i$ à $\vec{e'}_i$ et f un opérateur linéaire représenté par la matrice de coefficient M_{ij} dans la base $\vec{e}_i$ on a par définition

$$\vec{e'}_j = P_{ij}\vec{e}_i \quad , \quad f(\vec{e}_j) = M_{ij}\vec{e}_i$$

Montrez que P est une matrice d'isométrie. On notera par la suite $R = {}^tP$. Soit x_i les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base $\vec{e}_i$, montrez que les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\vec{e'}_i$ sont données par :

$$x'_i = R_{i\alpha}x_\alpha$$

2.3 Transfornation d'un tenseur par changement de base

Soit a_i trois grandeurs qui sont fonctions (explicitement ou implicitement) des coordonnées x_i. On se pose la question de la transformation de a_i lors d'un changement de base. On dira que a_i est un vecteur (ou tenseur de rang 1) si il se tranforme comme :

$$a'_i = R_{i\alpha}a_\alpha$$

De même pour les grandeurs dépendant de deux indices T_{ij}. On dira que T_{ij} est un tenseur de rang 2 si au cours d'un changement d'axe on a :

$$T'_{ij} = R_{i\alpha}R_{j\beta}T_{\alpha\beta}$$

Vérifiez que cette transformation correspond à la transformation usuelle d'une application linéaire. Vérifiez que δ_{ij} est invariant par une transformation de changement de coordonnées. On généralise ceci pour des tenseurs de rang plus élevé.

2.4 Contraction d'un tenseur

Montrez que la trace $T_{\alpha\alpha}$ d'un tenseur est invariante par changement de coordonnées. De même, en déduire que si T_{ijk} est un tenseur de rang 3, alors T_{ijj} se transforme comme un vecteur. Plus généralement si $T_{i_1,i_2,\cdots,i_m}$ se tranforme comme un tenseur de rang m alors $T_{j,j,\cdots,i_m}$ se tranforme comme un tenseur de rang $m-2$. Cette opération s'appelle une contraction d'un tenseur.

2.5 Produit extérieur de deux tenseurs

Soient deux vecteurs **u** et **v** (*ie* des tenseurs d'ordre 1) de composantes u_i et v_i, $i = 1,2,3$. On définit la quantité T_{ij} :

$$T_{ij} = u_i v_j$$

Montrez que T est un tenseur d'ordre 2. On dit que T est le produit extérieur de u et v. Généralisez ce résultat au produit de deux tenseurs d'ordre quelconque.

2.6 Contraction du produit extérieur de deux tenseurs

Soient deux vecteurs **u** et **v** et T le produit extérieur de u et v. Que vaut la trace de T ?

3 Application à l'élasticité

3.1 Définition des 3 tenseurs de l'élasticité

En élasticité on commence par définir deux tenseurs d'ordre 2 : le tenseur des contraintes $\tilde{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\tilde{u}$ qui sont tous les deux symétriques, c'est à dire que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $u_{ij} = u_{ji}$. En théorie de l'élasticité linéaire on postule qu'il existe une relation lineaire entre $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{u}$, donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl}$$

Les coefficients C_{ijkl} sont les constantes élastiques du système. Montrez que $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{u}$ étant des tenseurs d'ordre 2, C_{ijkl} est nécessairement un tenseur d'ordre 4.
En outre, l'énergie élastique du système s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

vérifiez que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial E}{\partial u_{ij}} \quad \text{et} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_{ij} \partial u_{kl}}$$

3.2 Symétrie du tenseur des constantes élastiques

Le tenseur des déformation étant symétrique le produit $u_{ij}u_{kl}$ ne change pas lorsque l'on permute i et j, k et l ou la paire (i, j) et (k,l). On en déduit donc que le tenseur des constantes élastiques vérifie les relations suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

Le nombre de combinaisons possibles de quatre indices $ijkl$ est de $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Utilisez les relations de symétrie pour montrer que le nombre maximum de constantes élastiques est de 21.

3.3 Symétrie cubique et cas isotrope

On montre que lorsque le système est de symétrie cubique il n'existe que trois constantes élastiques différentes C_{11}, C_{12} et C_{44} où :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} \\
C_{12} &= C_{xxyy} = C_{xxzz} = C_{yyzz} \\
C_{44} &= C_{xyxy} = C_{xzxz} = C_{yzyz} \\
0 &= C_{xy,xz} = C_{xy,yz} = C_{xz,yz}
\end{aligned}$$

Les directions x, y, z correspondant aux axes du cube. On note souvent $C = C_{44}$ et $C' = 1/2(C_{11} - C_{12})$.

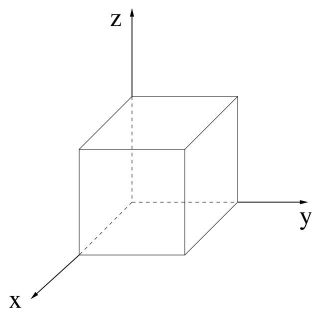

FIG. 1 – *axes du cube.*

Montrez que dans les axes du cube on a la relation :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}u_{xx} + C_{12}u_{yy} + C_{12}u_{zz} \\
\sigma_{yy} &= C_{12}u_{xx} + C_{11}u_{yy} + C_{12}u_{zz} \\
\sigma_{zz} &= C_{12}u_{xx} + C_{12}u_{yy} + C_{11}u_{zz}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = 2C_{44}u_{xy} \quad , \quad \sigma_{xz} = 2C_{44}u_{xz} \quad , \quad \sigma_{yz} = 2C_{44}u_{yz}$$

Dans le cas isotrope il n'y a que deux constantes élastiques et nous avons la relation $C = C'$, on introduit en général les deux coefficients $\lambda = C_{12}$ et $\mu = C = C'$. Démontrez la relation :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

3.4 Changement d'axe

L'élasticité a une grande importance pour les phénomènes physiques qui se passent dans le volume des matériaux mais elle a aussi une grande influence sur les propriétés de surface. Or la surface d'un cristal cubique par exemple n'a aucune raison d'être orientée simplement par rapport aux axes du cube et l'on est alors amené à effectuer des transfomation pour obtenir les constantes élastiques dans un système d'axe "adapté" à la surface. Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ la base donnée par les axes du cube et $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ la base obtenue par une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'axe $\vec{e}_2$. Montrez que la matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En partant de l'expression reliant σ_{ij} et u_{ij} dans les axes du cube et en effectuant le changement d'axe sur $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{u}$ on montre (calcul facile mais un peu long) que dans le nouveau système d'axe on a la relation :

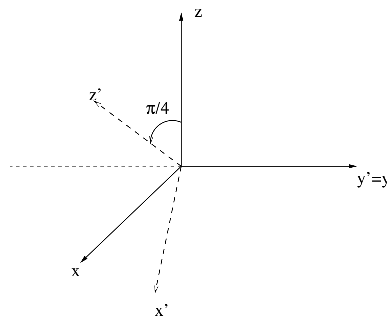

FIG. 2 – *rotation autour de l'axe y donné par le vecteur* $\vec{e}_2$

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{x'x'} &= (C_{11}/2+C_{12}/2+C_{44})u'_{x'x'}+C_{12}u'_{y'y'}+(C_{11}/2+C_{12}/2-C_{44})u'_{z'z'}\\
\sigma'_{y'y'} &= C_{12}u'_{x'x'}+C_{11}u'_{y'y'}+C_{12}u'_{z'z'}\\
\sigma'_{z'z'} &= (C_{11}/2+C_{12}/2-C_{44})u'_{x'x'}+C_{12}u'_{y'y'}+(C_{11}/2+C_{12}/2+C_{44})u'_{z'z'}\\
\sigma'_{x'y'} &= 2C_{44}u'_{x'y'}\\
\sigma'_{y'z'} &= 2C_{44}u'_{y'z'}\\
\sigma'_{x'z'} &= (C_{11}-C_{12})u'_{x'z'}
\end{aligned}
$$

En déduire les constantes élastiques dans le nouveau système d'axe. Vérifiez que dans le cas isotrope les constantes élastiques sont bien inchangées.