**ESPCI Première année** Année 2005-2006
**Méthodes Mathématiques**
*Cyrille Barreteau*
**cyrille.barreteau@cea.fr**
**http ://www-drecam.cea.fr/Phocea/Membres/Cours/index.php**

# Tutorat no 1
## Systèmes d'équations différentielles

**Résumé**

*Il est sans doute inutile de vous rappeler l'importance des équations différentielles qui interviennent à peu près dans tous les domaines scientifiques : physique, économie, biologie, écologie... Dans ce tutorat nous abordons plus spécifiquement les systèmes d'équations différentielles. Dans une première partie nous traitons le cas des systèmes différentiel lineaires et nous détaillons le cas le plus simple (mais très pédagogique) du système différentiel linéaire à coefficient constant en dimension deux. Dans une seconde partie nous étudions le cas non-linéaire en essayant d'extraire quelques comportements généraux. Ces deux premières parties se présentent essentiellement sous forme de "cours" avec quelques petites démonstrations à effectuer. Dans la troisème partie nous traiton un exemple "ludique" sous forme de problème d'un système d'équations différentielles repésentant l'évolution de deux espèces en compétition du type "proie-prédateur".*

## 1 Systèmes différentiels linéaires

*Les seuls systèmes différentiels dont on puisse faire une analyse à peu près complète sont les systèmes linéaires. Nous verrons que même pour ces derniers on ne sait en général pas écrire les solutions explicites, sauf dans le cas des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, que nous développons en détail dans le cas bidimensionnel. Dans toute la suite nous nous placerons dans un espace de dimension finie et manipulerons donc des vecteurs (de n composantes) et des matrices de dimension finie (de taille $(n \times n)$).*

### 1.1 Systèmes différentiels linéaires : cas général

Une équation différentielle linéaire est une équation portant sur une fonction vectorielle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n) \quad (i = 1, 2, .., n)$, qui peut s'écrire :

$$\dot{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$$

ou plus généralement :

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

où $A(t)$ est une matrice carrée $n \times n$, et $\mathbf{g}(t)$ un vecteur dont les éléments sont fonctions de t. Le mot "linéaire" concerne uniquement la dépendance par rapport à $\mathbf{x}$ ; les éléments de $A(t)$ et $\mathbf{g}(t)$ n'ont pas à être linéaires en $t$ On dit que l'equation est *homogène* si $\mathbf{g}(t) = 0$ et non homogène si $\mathbf{g}(t) \neq 0$. Dans ce cas l'équation $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ est appelée *équation homogène associée.*

### 1.1.1 Superposition des solutions des équations homogènes.

Si $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ sont deux solutions d'une équation linéaire homogène $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, alors toute combinaison linéaire de $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ est aussi une solution.

### 1.1.2 Solution particulière et solutions générales.

Soit $\mathbf{u_p}$ une solution particulière de l'équation différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

Une fonction vectorielle $\mathbf{u}$ est solution générale si et seulement si elle peut s'écrire

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_p} + \mathbf{u_h}$$

où $\mathbf{u_h}$ est solution de l'équation homogène associée.

Ce théorème est très utile dans la pratique et donne naissance à la **méthode des coefficients indéterminés**. Si on connait la solution générale du système homogène il nous suffit de trouver une solution particulière de l'équation non-homogène. Une technique est de chercher une solution particulière de la "même forme" que la fonction $\mathbf{g}(\mathbf{t})$. Par exemple : combinaison de polynomes, ou de fonctions trigonométriques. C'est une méthode très simple mais qui ne marche pas toujours. On peut cependant l'adapter à diverses cas : séries entières, séries de Fourier, transformée de Fourier, transformée de Laplace etc..

### 1.1.3 Solution générale de $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$

*a) Résolvante*

On définit l'opérateur $R(t,s)$ appelé résolvante de la manière suivante : $R(s,t)$ est un opérateur vectoriel dépendant de deux variables réelles $t$ et $s$, agissant sur tout vecteur $\mathbf{u}_0$ de l'espace vectoriel tel que le nouveau vecteur $\mathbf{u} = R(t,s)\mathbf{u}_0$ est solution de l'équation homogène $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ avec pour condition initiale $\mathbf{u}(t=s) = \mathbf{u}_0$.

**Démontrez que $R(t,s)$ est un opérateur linéaire (on utilisera la propriété de superposition des solutions de l'équation homogène) et qu'il vérifie les propriétés suivantes :**

$$R(s,s) = Id \quad ; \quad R(t,t')R(t',s) = R(s,t) \quad ; \qquad R^{-1}(t,s) = R(s,t)$$

$R(t,s)$ est appelé la résolvante car sa connaissance permet de résoudre l'équation homogène pour des conditions initiales quelconques mais également de résoudre l'équation non homogène grâce à la formule magique.

*b) la formule magique*

On suppose connue la résolvante et on cherche une solution de $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = R(t,t_0)\mathbf{x_0} + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\mathbf{g}(s)ds$$

**Vérifiez que $\mathbf{u}(\mathbf{t})$** est bien solution de l'équation non-homogène :

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{t}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{x_0}$$

*Il s'agit d'un beau résultat formel* **MAIS** *il n'existe malheureusement pas d'expression explicite de la résolvante $R(t,s)$ dans le cas général. Intérêt théorique important mais intérêt pratique limité.*

## 1.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficient constants

On s'intéresse aux systèmes différentiels de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

où $A$ est une matrice carrée $n \times n$ à coefficients constants (ne dépendant pas de la variable $t$) et $\mathbf{b}$ un vecteur (également constant).

### 1.2.1 Exponentielle de matrice carrée

Commençons par définir et étudier quelques propriétés de l'exponentielle d'une matrice carrée.
On la définit naturellement de la manière suivante :

$$exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

**Montrez que la série définissant** $exp(A)$ **converge pour toute matrie carrée** $A$. On pourra utiliser pour démontrer ce résultat une norme matricielle particulère (la norme triple est particulièrement pratique).

### 1.2.2 Quelques exemples et propriétés

a) *exponentielle de l'identité*

**Calculez** $exp(I)$ et plus généralement $\exp(tI)$, $t \in \mathbb{R}$
b) *exponentielle d'une matrice diagonale*

Soit $A$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ **montrez que** $exp(tA)$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \cdots e^{t\lambda_n}$

c) *exponentielle d'une matrice diagonalisable*
Soit $A$ une matrice diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ **montrez que** $exp(tA)$ est une matrice diagonalisable dans la même base que $A$ et dont les valeurs propres sont $e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \cdots e^{t\lambda_n}$,

d) *formule d'addition*
Soit $A$ et $B$ deux matrices $n \times n$ qui <u>commutent</u>, **montrez que**

$$exp(A + B) = exp(A)exp(B)$$

e) *formule de dérivation*
Soit $A$ une matrice $n \times n$. **Montrez que**

$$\frac{d}{dt} exp(tA) = A exp(tA)$$

### 1.2.3 Matrice résolvante

**Vérifiez** que la solution $\mathbf{u}(t)$ de l'équation $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ avec pour condition initiale $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0$ est :

$$\mathbf{u}(t) = exp((t-t_0)A)\mathbf{x_0}$$

**En déduire** que la résolvante s'écrit simplement :

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}$$

### 1.2.4 classification des comportements en dimension 2 : diagramme de bifurcation

Soit $A$ une matrice $2 \times 2$ à coefficients réels constants.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On s'intéresse au comportement des solutions de l'équation $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ et à l'allure des trajectoires dans le plan $(x,y)$. Comme on vient de le voir on doit calculer l'exponentielle $exp(tA)$ et pour classifier les différents types de comportement on distinguera les cas suivants.

(1) deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ réelles, distinctes et non nulles.
- (i) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ : noeud répulsif.
- (ii) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ : col.
- (iii) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ : noeud attractif.

(2) deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
- (i) $\alpha < 0$ foyer attractif : spirale vers $(0,0)$
- (ii) $\alpha = 0$ centre : ellipses de centre $(0,0)$ (trajectoires périodiques).
- (iii) $\alpha > 0$ foyer répulsif : spirale s'éloignant de $(0,0)$.

(3) la matrice $A$ possède une valeur propre double
- (i) $A$ est multiple de l'identité
- (ii) $A$ possède une seule direction propre.

(4) la matrice $A$ possède une valeur propre nulle
- (i) A possède deux valeurs propres nulles (et $A \neq 0$)
- (ii) $A$ possède une seule valeur propre nulle.

*a) Etude du cas (1)*
Soit $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$. **Montrez que** les solutions générales s'écrivent :

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

**Tracez l'allure des trajectoires** dans les cas i), ii) et iii).

*b) Etude du cas (2)*
Soit $\mathbf{v}$ le vecteur propre associé à $\alpha + i\beta$ **montrez que** le vecteur propre associé à $\alpha - i\beta$ est $\bar{\mathbf{v}}$. On pose $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 - i\mathbf{w}_2$ où $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont réels. **Montrez que** la matrice $A$ a pour expression dans la nouvelle base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

On décompose alors $A_1$ sous la forme :

$$A_1 = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Montrez que**

$$e^{tA_1} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

**Tracez l'allure des trajectoires** dans les cas i), ii) et iii).

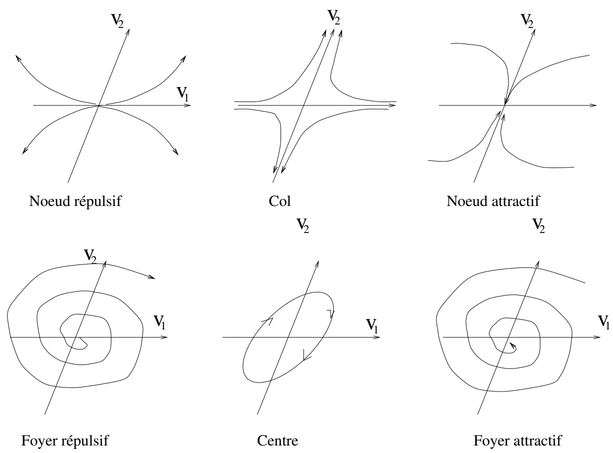


FIG. 1 – *Représentation graphique des différents comportements en dimension 2.*

*c) Etude du cas (3)*

Soit $\lambda$ la valeur propre unique de la matrice $A$. **Ecrivez la solution générale** dans le cas i). Dans le cas ii) **montrez que** la matrice $A$ a pour expression dans une base adaptée :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

**Montrez que**

$$e^{tA_1} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Tracez l'allure des trajectoires** dans les cas i) et ii)

*d) Etude du cas (4)*

Dans le cas i) **montrez que** l'application linéaire $A$ a pour matrice dans une base adaptée :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Calculez $exp(tA_1)$
Soit $\lambda$ la valeur propre non nulle, **montrez que** dans le cas ii) la matrice $A$ a pour expression dans une base adaptée :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda 0 \\ 00 \end{pmatrix}$$

**Calculez** $exp(tA_1)$
*e) diagramme de bifurcation dans le plan trace-déterminant :*
**Montrez que** le polynome caractéristique de la matrice $A$ s'écrit

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

**Justifiez le diagramme** de bifurcation dans le plan $((Tr(A), \det(A))$ suivant :

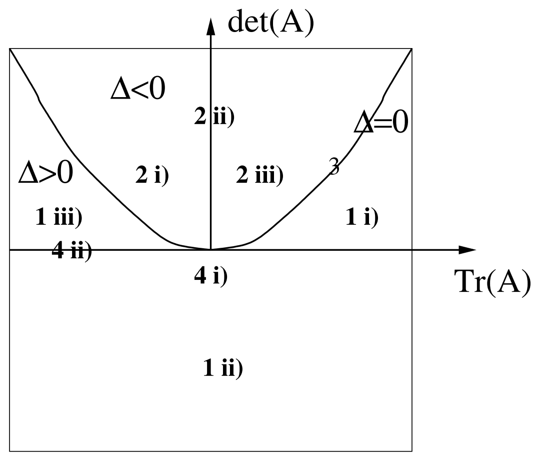


FIG. 2 – *Diagramme de "bifurcation".*

## 2 Deuxième partie : Systèmes différentiels non linéaires

On écrira les équations en dimension 2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

## 2.1 Comportement local

On linéarise autour d'un point singulier $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) & = & 0 \\ g(x_0,y_0) & = & 0 \end{cases}$$

On fait un développement au premier ordre autour du point singulier en posant $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0,y_0} & \frac{\partial f}{\partial y}|_{x_0,y_0} \\ \frac{\partial g}{\partial x}|_{x_0,y_0} & \frac{\partial g}{\partial y}|_{x_0,y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

**Théorème** *: Le comportement local est presque toujours identique au cas linéaire. Les puits restent des puits et les sources restent des sources.*
*2 exceptions* à cette assertion :
-cas où les valeurs propres sont imaginaires pures.
-cas d'une valeur propre nulle.
Dans ces deux cas il faut faire une étude plus détaillée...

## 2.2 Comportement global

Le comportement global est fixé par le nombre la position et la nature des points critiques. Il existe cependant un comportement NOUVEAU : **le cycle limite**.

## 2.3 Champ de vecteur

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel il est très pratique dessiner le champ de vecteur qui peut nous fournir des renseignements précieux sur les différents formes de solutions possibles. Il s'agit de la représentation graphique en chaque point $(x,y)$ de l'espace du vecteur $(f(x,y), g(x,y))$ qui lui est associé. En effet ce vecteur sera tangent à la trajectoire solution du système différentiel passant par ce point (justifier ce résultat). Le champ de vecteur nous donne donc une idée assez précise des solutions possibles et de leur comportement asymptotique comme illustré sur le schéma suivant :

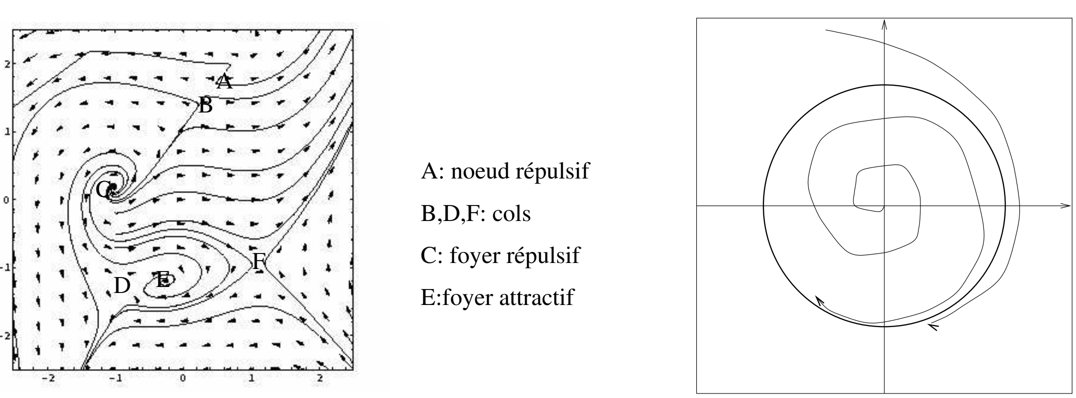


FIG. 3 – *A gauche : Comportement global d'une solution d'un système non linéaire et son champ de vecteur associé. A droite : Cycle limite*

## 3 Les requins et les sardines (Problème)

Après la première guerre mondiale un responsable du bureau de la pêche italienne contacte Vito Volterra mathématicien pour analyser la proportion de requins (prédateur) et de sardines (proie) dans les eaux italiennes. Volterra proposa le système différentiel suivant pour expliquer les phénomènes observés :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax - cxy \\ \dot{y} & = & -by + fxy \end{array}\right.$$

Où $x$ et $y$ représentent respectivement le nombre de sardines et de requins. Avec $a, b, c, f$ des réels positifs.
a) Comment se comporte la population de sardines en l'absence de requins ?
b) Même question pour les requins en l'absence de sardines.
c) Trouvez les points singuliers et caractérisez (si possible) leur comportement local. Que se passe-t-il avec le point $(b/f, a/c)$ ?
d) Tracez à la main le champ de vecteur dans l'espace des phases du plan $(x, y)$ en quelques points entourant le point $(b/f, a/c)$.
Quel comportement qualitatif prévoyez vous ?
e) En considérant $y$ comme variable de $x$ montrez que $dy/dx$ vérifie un équation différentielle à variables séparables.
f) Intégrez par quadrature cette équation et mettre sous la forme :

$$p(x) + q(y) = K$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} p(x) & = & fx - b\ln x \\ q(y) & = & cy - a\ln y \end{array}\right.$$

g) Tracez les courbes $p(x)$ et $q(y)$ et en déduire la forme de $p+q$ et de ses lignes de niveaux.
h) Montrez que les trajectoires sont périodiques. Quel est le sens de parcours des trajectoires.
i) Calculer la valeur moyenne des populations le long d'une trajectoire fermée. Que constate-t-on ?
j) Quelles critiques peut-on faire à ce modèle ? Proposez des améliorations et essayez de prévoir le comportement des populations de sardines et de requins.