Chapitre 2

Calcul des variations

2.1 Préliminaire : Multiplicateurs de Lagrange

Pour comprendre l'intérêt des multiplicateurs de Lagrange, considérons une fonction f :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. f est supposée continue et admettant des dérivées première et seconde continues sur U.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \overrightarrow{grad}\ f.\overrightarrow{dr}$$

Si en (x_0, y_0), on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ alors (x_0, y_0) est un point stationnaire de f. La nature du point stationnaire dépend des dérivées d'ordres supérieurs.

Que se passe-t-il si (x, y) au lieu de parcourir tout U, se déplace sur une trajectoire $g(x, y) = cste$ $(c \in \mathbb{R})$ et g une fonction de classe C^2 sur U ?

Exemple
$\mathrm{U} = \mathbb{R}^2$ et $g(x,y) = x^2 + y^2$

1$^{\text{ère}}$**méthode** Par substitution.
On exprime une variable par rapport à l'autre (ex : $y = \sqrt{1 - x^2}$) et on résout $\dfrac{df}{dx} = 0$.
Cette méthode se révèle peu praticable pour les fonctions de plus de 2 variables.

2$^{\text{ème}}$**méthode** On utilise les multiplicateurs de Lagrange. Partons de :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si dx et dy sont indépendants, alors

$$df = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Mais ici, ce n'est pas le cas puisque dx et dy sont reliés par la relation $g(x,y) = cste$.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}dx = -\frac{\partial g}{\partial y}dy$$

Donc, en supposant que $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, on a :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} \right) dx$$

On cherche les points (x,y) de la trajectoire autorisée (c'est-à-dire $g(x,y) = cste$) pour lesquels $df = 0$.

$$\begin{aligned} df = 0 \quad &\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} \right) \\ &\Longrightarrow \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} = \lambda \quad \text{(en supposant que = } \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0) \end{aligned}$$

Aux points recherchés, $\overrightarrow{\nabla f}$ et $\overrightarrow{\nabla g}$ doivent être colinéaires pour que f soit stationnaire sur le chemin défini par g.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Ce système donne (x,y) en fonction de λ. En réinjectant $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ dans $g(x,y) = cste$, on trouve les valeurs possibles de λ et les éventuelles solutions du problème.

Remarques

- (2.1) et (2.2) $\Longleftrightarrow$ la fonction $f - \lambda g$ est stationnaire en l'absence de toute contrainte sur (x,y).
- λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

<u>Exemple</u>

$$f(x,y) = xy \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - 2\lambda x = 0 \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2\lambda y = 0 \tag{2.4}$$

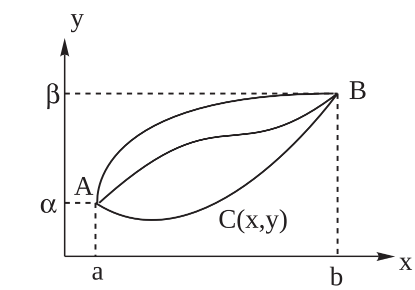
$$(2.3) + (2.4) \Longrightarrow (x+y)(1-2\lambda) = 0$$

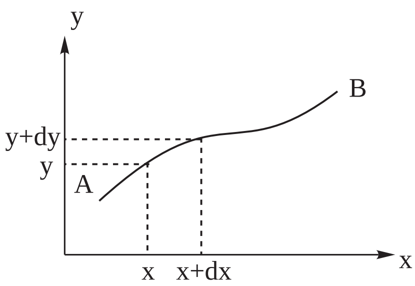
$$(2.3) - (2.4) \Longrightarrow (x-y)(1+2\lambda) = 0$$

- Pour $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$, on a $x = 0$ et $y = 0$: ces solutions ne satisfont pas $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = y \Longrightarrow (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, $x = -y \Longrightarrow (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

2.2 Equation d'Euler-Lagrange

2.2.1 Introduction





On considère un signal qui se propage dans un milieu inhomogène avec une vitesse C(x,y). Quel est le trajet entre A et B qui rende le temps de parcours minimal ?

Supposons le trajet sous la forme $y = y(x)$, on a $y(x=a) = \alpha$ et $y(x=b) = \beta$.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

Le temps de parcours à minimiser vaut :

$$\int_a^b dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\mathrm{C}(x,y)}$$

2.2.2 Formulation générale du problème

Soit L une fonction de classe C^2 :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_1, u_2, u_3) & \longmapsto & \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) \end{array}$$

Considérons la fonctionnelle I, qui, à toute fonction f ($f : x \longmapsto f(x)$) de l'intervalle borné $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^2, associe le nombre :

$$\mathrm{I}[f] = \int_a^b \mathrm{L}(f(x), f'(x), x) dx$$

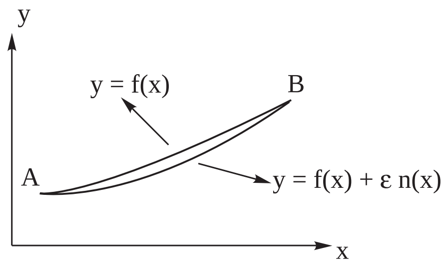
<u>Problème</u> Trouver la fonction qui rende $\mathrm{I}(f)$ extrémale tout en satisfaisant :

$$f(a) = \alpha \qquad f(b) = \beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Soit f la solution recherchée. On considère la fonction :

$$x \longmapsto f(x) + \varepsilon\eta(x)$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$ petit et $\eta(x)$ arbitraire, C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$, satisfaisant $\eta(a) = 0$ et $\eta(b) = 0$.



La fonctionnelle I sera stationnaire pour f si $\mathrm{I}[f] = \mathrm{I}[f + \varepsilon\eta]$ à l'ordre 1 en ε.

$$\mathrm{I}[f + \varepsilon\eta] - \mathrm{I}[f] = \mathrm{o}\,(\varepsilon)$$

$$\mathrm{I}[f + \varepsilon\eta] = \int_a^b \mathrm{L}(f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x), x) dx$$

$$\mathrm{L}(f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x), x) = \mathrm{L} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}\varepsilon\eta + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\varepsilon\eta' + \mathrm{o}\,(\varepsilon)$$

où on utilise les notations :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} & = & \dfrac{\partial \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} & = & \dfrac{\partial \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_2} \end{array}$$

avec $u_2 = f'(x) \quad u_1 = f(x) \quad u_3 = x$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}[f+\varepsilon\eta] &= \mathrm{I}[f] + \varepsilon \int_a^b \{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}\eta + \frac{\partial l}{\partial f'}\eta'\}dx + \mathrm{o}(\varepsilon) \\ &= \mathrm{I}[f] + \mathrm{o}(\varepsilon) \\ \Longrightarrow \int_a^b \{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}\eta + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta'\}dx &= 0 \end{aligned}$$

Par intégation par partie (IPP) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta' dx &= \left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\eta dx \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\eta dx \;\text{ car }\; \eta(a) = \eta(b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \eta(x)\{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\} = 0$$

La fonction $\eta(x)$ étant arbitraire, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right) = 0}$$

C'est l'**équation d'Euler-Lagrange**.

Toute solution de cette équation rend stationnaire la fonctionnelle $\mathrm{I}[f] = \displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(f(x), f'(x), x)dx$.

Remarques

- L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle du second ordre pour f.
- $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}$ est bien une fonction de x uniquement.
  En effet, $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = \dfrac{\partial \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_2}$ avec $u_1 = f(x)$, $u_2 = f'(x)$, $u_3 = x$.

2.2.3 Cas particuliers

(*i*) L ne dépend pas explicitement de f

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} = 0$ donc, d'après l'équation d'Euler-Lagrange, $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = cste}$ c'est-à-dire ne dépend pas de x.

<u>Exemple</u>

$\mathrm{I}[f] = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+f'^2}dx$

Soit $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) = \sqrt{1+u_2^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_2} = \frac{2u_2}{2\sqrt{1+u_2^2}} \\
&= \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = cste \\
\Longrightarrow f(x) &= \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha
\end{aligned}$$

La trajectoire $f(x)$ est le chemin le plus court entre A(a,α) et B(b,β).

(*ii*) L ne dépend pas explicitement de x

$\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3)$ est indépendant de u_3.

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}f' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}f'' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}(=0)$$

Comme f est solution de l'équation d'E.L, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)$$

Donc,

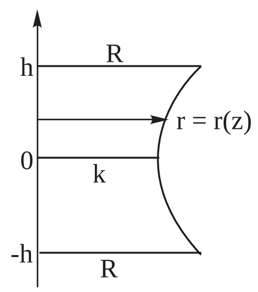
$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{L}}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)f' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}f'' \\
&= \frac{d}{dx}\left(f'\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{L} - f'\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = cste}$$

Il s'agit ici d'une intégrale première.

Exemple

Quelle est la surface d'aire minimale qui relie deux cercles de même rayon parallèles et centrés sur le même axe ?



L'aire latérale de la surface vaut :

$$\mathrm{I}[r] = \int_{-h}^{+h} 2\pi r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}dz$$

Soit

$$\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3) = 2\pi u_1\sqrt{1+u_2^2}$$

Cela donne donc d'après le (ii) :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} - r'\frac{\partial \mathrm{L}}{r'} &= 2\pi k \\ &= 2\pi r\sqrt{1+r'^2} - 2\pi r'.r\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \end{aligned}$$

Au final on obtient l'équation de la surface, qui est une caténoïde :

$$\frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = k$$

En intégrant,

$$r(z) = k\,\mathrm{ch}\,(\frac{z}{k})$$

on obtient k par la condition aux limites $\mathrm{R} = k\,\mathrm{ch}\,(\frac{h}{k})$

Remarques

- Si on pose $\tilde{k} = \frac{k}{h}$ alors $\frac{\mathrm{R}h}{\tilde{k}} = \mathrm{ch}\,(\frac{1}{\tilde{k}})$
  On peut donc déterminer numériquement $\tilde{k}$ en fonction de $\frac{\mathrm{R}}{h}$ en traçant les courbes $x \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{h}x$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$.
- Lorsque cette équation n'admet plus de solution, notamment si $\frac{h}{\mathrm{R}}$ est "trop grand", c'est qu'il y a rupture de la surface.
- La résolution de l'équation d'E.L donne un extremum et pas forcément un minimum.

<u>Exemple</u>

$\mathrm{R} = 1$, $h = \frac{1}{2}$ donne $k = 0.235$ et $k = 0.848$. On montre que la première valeur de k correspond à une aire maximum et la seconde à l'aire minimum recherchée.

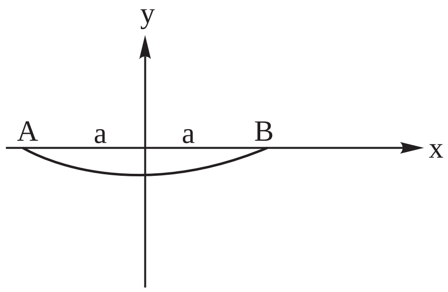
2.2.4 Variations contraintes

<u>Exemple</u>

On attache une corde entre deux points A et B, sa longueur l_0 étant supérieure à $2a$.

L'équation de la corde $y(x)$ est telle que $y(a) = y(-a) = 0$.

En considérant que la corde est non-extensible, on obtient $y(x)$ en minimisant l'énergie potentielle.



$$\mathrm{I}[y] = \int_{-a}^{a} dx(\mu g(\sqrt{1+y'^2})y(x))$$

La longueur de la corde étant fixe, on a une contrainte supplémentaire :

$$l_0 = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{1+y'^2}$$

On introduit donc le multiplicateur de Lagrange λ et on doit maintenant rendre stationnaire la fonctionnelle :

$$\int_{-a}^{a} dx(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

La fonction $(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1-y'^2}$ ne dépend pas explicitement de x donc d'après le paragraphe 2.2.3 :

$$(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'((\mu g y(x) - \lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k \ \ (k \in \mathbb{R})$$

D'où :

$$\mu g y(x) - \lambda = k\sqrt{1+y'^2}$$

Après quelques manipulations et intégration de l'équation différentielle :

$$y(x) = \frac{k}{\mu g}\,\mathrm{ch}\,(\frac{\mu g}{k}(x+\mathrm{C})) + \frac{\lambda}{\mu g}$$

Cette équation a trois inconnues : k,λ, et C et nous avons trois équations supplémentaires :

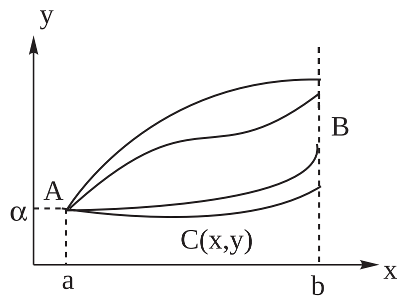
- La contrainte l_0
- $y(a) = 0$
- $y(-a) = 0$

Le résultat définitif est donc :

$$y(x) = \frac{k}{\mu g}\{\mathrm{ch}\,(\frac{\mu g x}{k}) - \mathrm{ch}\,(\frac{\mu g a}{k})\}$$

avec

$$\mathrm{sh}\,(\frac{\mu g a}{k}) = \frac{\mu g l_0}{2k}$$



2.2.5 Extrémité libre

On reprend l'exemple de chapitre 2.2.2, mais l'ordonnée du point B n'est plus imposée.

$$\mathrm{I}[f] = \int_a^b \mathrm{L}(f(x), f'(x), x)dx$$
$$f(x=a) = \alpha \quad \text{et} \quad \eta(x=a) = 0$$

On veut encore rendre la fonctionnelle I stationnaire :

$$\mathrm{I}[f+\varepsilon\eta] - \mathrm{I}[f] = \varepsilon\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b)\eta(x=b) + \varepsilon\int_a^b \eta\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\right)dx + \mathrm{o}\left(\varepsilon\right)$$

Cette relation doit être vraie pout tout η ; on a donc

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b) = 0$$

en plus de la relation d'Euler-Lagrange : $\dfrac{d\mathrm{L}}{df} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)$.

Exemple

Pour un milieu homogène, on a $\mathrm{L} = \sqrt{1+f'^2}$. L ne dépend pas de f donc :

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = cste$$

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b) = 0$ impose que $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = 0$ et donc $f' = 0$

La bonne solution est donc logiquement la ligne droite.

2.2.6 Mécanique classique et "principe de moindre action"

Soit un point matériel de massse m se déplaçant sur l'axe des x dans un potentiel $\mathrm{V}(x)$.
Soit x_A, la position de la particule en $t = t_\mathrm{A}$ et x_B, la position de la particule en $t = t_\mathrm{B}$
Quelle va être la trajectoire $x(t)$ de cette particule ?
On considère la fonctionnelle S, l'**Action** qui associe à une trajectoire $x(t)$ le nombre

$$\mathrm{S} = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \mathrm{V}(x)\right)dt$$

La quantité $\mathrm{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \mathrm{V}(x)$ est appelée **Lagrangien**.

La trajectoire effectivement suivie est celle qui minimise l'action. Par l'équation d'Euler-Lagrange on a donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} &= -\frac{d\mathrm{V}(x)}{dx} \end{aligned}$$

On retrouve donc la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -\frac{d\mathrm{V}(x)}{dx}$$

Remarques

- L ne dépend pas explicitement du temps donc $\dot{x}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} - \mathrm{L}$ est indépendant du temps. Cela implique que $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \mathrm{V}(x)$ est indépendant du temps : c'est la conservation de l'énergie.
- On peut aussi exprimer certains problèmes de mécanique quantique sous forme variationnelle.