Chapitre 5

Distributions

5.1 Espace fonctionnel

5.1.1 Définition

Définition :

On appelle espace fonctionnel un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel.

Exemple

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R})$ forment des espaces fonctionnels.
$\mathcal{L}^1(A)$ est la classe de fonctions Lebesgues–intégrables sur A.
Si on convient d'identifier les fonctions de $\mathcal{L}^1(A)$ égales presque partout, on obtient un nouvel espace $L^1(A)$ ($f \overset{\text{p.p.}}{=} g$ dans $\mathcal{L}^1(A)$ est équivalent à $f = g$ dans $L^1(A)$).

5.1.2 Fonctionnelle

Définition :

On appelle fonctionnelle T sur un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}$. On note :

$$T : \begin{cases} \mathcal{F} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \quad < T,f > \end{cases}$$

Exemple

$$T : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \quad < T,f >= \displaystyle\int f(x)\, d\mu(x) \end{cases}$$

Définition :

L'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est dit "topologique" si on a donné un sens à l'expression "la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions de $\mathcal{F}$ converge pour $n \longrightarrow +\infty$ vers la fonction $\varphi(x) \in \mathcal{F}$".

Remarque

Si $\mathcal{F}$ est normé, on peut donner à l'expression "la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions de $\mathcal{F}$ converge pour $n \longrightarrow +\infty$ vers la fonction $\varphi(x) \in \mathcal{F}$" le sens suivant :

$$\forall \varepsilon \ \exists N = N(\varepsilon) \ \textit{tel que} \quad n > N \Longrightarrow \|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \varepsilon$$

Ce choix de convergence est appelé <u>convergence en norme</u>.

Définition :

La fonctionnelle T sur un espace fonctionnel topologique $\mathcal{F}$ est continue si pour toute suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{F}$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{F}$, la suite numérique $(< T,\varphi_n >)_n$ converge vers $< T,\varphi >$.
Elle est linéaire si pour tous complexes λ_1 et λ_2 et toutes fonctions φ_1 et φ_2 de $\mathcal{F}$ on a
$< T,\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 >= \lambda_1 \ < T,\varphi_1 > +\lambda_2 \ < T,\varphi_2 >$.

Définition :

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces fonctionnels topologiques, chacun muni de sa propre notion de convergence. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$:
- si $\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{G}$
- si une suite de $\mathcal{F}$ converge dans $\mathcal{F}$ au sens de la norme de $\mathcal{F}$, alors elle converge aussi dans $\mathcal{G}$ au sens de la norme de $\mathcal{G}$.

Exemple

On prend $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence simple. On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Définition : Densité

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{G}$ si toute fonction de $\mathcal{G}$ est la limite au sens de la convergence de $\mathcal{G}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{F}$.

Rappels

- *On appelle support d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ le plus petit fermé contenant $\{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) \neq 0\}$.*
- *On peut normer l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des classes d'équivalences de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour la classe d'équivalence "presque partout égale à", par :*

$$\| \ \|_{L^1(\mathbb{R})} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad f & \longrightarrow \quad \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \displaystyle\int |f(x)| \, d\mu(x) \end{cases}$$

Notation

On note $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions continues et à support borné.

Proposition

L'espace fonctionnel $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

5.1.3 Dual d'un espace fonctionnel topologique

Définition :

Le dual $\mathcal{F}'$ d'un espace fonctionnel topologique $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{F}$.

Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces fonctionnels topologiques. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et si $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$.

5.1.4 Espace fonctionnel $\mathcal{D}$

Définition :

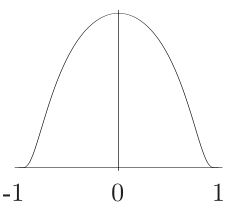
L'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment dérivables et à supports bornés forme un espace fonctionnel noté $\mathcal{D}$ et appelé espace fonctionnel de Schwartz.
Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés fonctions d'essai.

Exemple

La fonction de Schwartz définie par :

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

C'est une fonction de classe C^∞ ayant pour support $[-1,1]$.



$\zeta \in \mathcal{D}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \zeta^{(n)}(-1) = \zeta^{(n)}(1) = 0$$

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et soit f sommable à support borné, alors le produit de convolution $\big(\varphi * f\big)(x) = \int \varphi(x - x')\, f(x')\, d\mu(x')$ appartient à $\mathcal{D}$.

5.1.5 Convergence dans $\mathcal{D}$

Définition :

On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ au sens de $\mathcal{D}$ quand n tend vers l'infini si :
- les supports de tous les φ_n sont contenus dans un même ensemble borné
- pour $p \in \mathbb{N}$ donné, la suite $\big(\varphi_n^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^{(p)}$

5.2 Distributions

5.2.1 Définition

Définition :

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}$. L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}'$.

Remarque

– Une distribution est une fonctionnelle, et non une fonction.

Propriété

L'espace $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel avec les lois suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & < T_1 + T_2,\varphi > & = & < T_1,\varphi > + < T_2,\varphi > \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} & < \lambda T,\varphi > & = & \lambda < T,\varphi > \end{array}$$

Remarques

- T est dite nulle si et seulement si $\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T,\varphi >= 0$
- $T_1 = T_2$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T_1,\varphi >=< T_2,\varphi >$

5.2.2 Distributions régulières

Définition :

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, localement sommable. L'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$T_f : \varphi \longmapsto < T_f,\varphi >= \int f(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x)$$

est une distribution dite <u>régulière</u>. Toute distribution qui ne peut pas s'écrire sous cette forme est dite <u>singulière</u>.

Remarque

En physique on note souvent f la distribution régulière T_f.

Proposition

Soient f et g deux fonctions localement sommables. On a :

$$T_f = T_g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout}$$

Exemple

La fonction de Heaviside est localement sommable et on peut lui associer une distribution régulière notée T_H :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad < T_H,\varphi >= \int H(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

C'est la distribution de Heaviside.

5.2.3 Distribution de Dirac

Définition : Distribution de Dirac

On définit une distribution δ, appelée distribution de Dirac, telle que :

$$\delta\ :\begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \quad < \delta,\varphi >= \varphi(0) \end{cases}$$

δ est une distribution singulière : il n'existe pas de fonction δ localement sommable telle que

$$\int \delta(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Remarque

De manière générale, le produit de deux distributions n'est pas défini.

Proposition (cas particulier)

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ (pas forcément à support borné).

Soit T_ψ la distribution régulière associée à ψ. Le produit $T_\psi T$ d'une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'$ par T_ψ est défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \boxed{< T_\psi T, \varphi > = < T, \varphi \psi >}$$

Distributions singulières découlant de δ

- soit $a \in \mathbb{R}$

$$\delta_{(a)} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{cases}$$

  $\delta_{(a)}$ est notée $\delta(x-a)$ en physique.
- soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\delta(\lambda x) : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \dfrac{1}{|\lambda|}\,\varphi(0) \end{cases}$$

5.2.4 Valeur principale de Cauchy

1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie en tout point d'un intervalle fini $[a,b]$, à l'exception d'un point $c \in]a,b[$ au voisinage duquel elle n'est pas bornée. Il se peut que l'intégrale impropre de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$

   soit infinie, mais que la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

   soit finie. Dans ce cas, cette limite est appelée <u>valeur principale de Cauchy</u> de f et on note

$$\mathrm{vp}\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

2. Soit f une fonction à valeurs réelles dont l'intégrale de Riemann est finie sur tout intervalle fini de la forme $[a,b]$. Il se peut que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

   soit infinie, mais que la limite suivante :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^b f(x)\,dx$$

   soit finie. Dans ce cas, la deuxième intégrale est appelée valeur principale de Cauchy de f sur $\mathbb{R}$, et on note :

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^b f(x)\,dx$$

5.2.5 Distribution $P_f \dfrac{1}{x}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas localement sommable. Cependant, l'expression

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right) = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

a un sens quelle que soit φ dans $\mathcal{D}$. En effet, par un changement de variable élémentaire, on a :

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx$$

Or au voisinage de l'origine, la fonction dans la deuxième intégrale est bornée car elle est l'expression du taux de variation de φ au voisinage de l'origine.

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2\,\varphi'(0)$$

Donc

$$< P_f \, \frac{1}{x}, \varphi >= \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Cette distribution est une distribution singulière.

Proposition

Dans $\mathcal{D}'$, on a $x\, P_f \, \dfrac{1}{x} = 1$, où x est la distribution associée à la fonction identité de $\mathcal{D}$, et 1 la distribution associée à la fonction unité de $\mathcal{D}$.

5.3 Transformée d'une distribution

5.3.1 Translation

On définit la fonction translation $\tau_a : x \mapsto x - a$, $a \in \mathbb{R}$. A partir de cette définition, on peut définir la translatée d'une distribution T, noté $T \circ \tau_a$.

Définition :

$$< T \circ \tau_a, \varphi >=< T, \varphi \circ \tau_a^{-1} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

5.3.2 Dilatation

Définition :

On définit la fonction dilatation $d_\lambda : x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. A partir de cette définition, on peut définir la "dilatée" d'une distribution T, notée $T \circ d_\lambda$:

$$< T \circ d_\lambda, \varphi >= \frac{1}{|\lambda|} < T, \varphi \circ d_\lambda^{-1} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

On peut considérer le cas particulier où $\lambda = -1$, dont on peut tirer deux définitions :

1. T est dite paire si $T \circ d_{-1} = T$,
2. T est dite impaire si $T \circ d_{-1} = -T$.

Exemples

1. La distribution de Dirac est paire.
2. La distribution $P_f\, \frac{1}{x}$ est impaire.

5.4 Support d'une distribution

Définition :

1. On dit qu'un distribution T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ si $< T,\varphi >= 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est contenu dans U.
2. On appelle support d'une distribution T le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que T soit nul dans son complémentaire.

Proposition

Soit f localement sommable. Soit T_f sa distribution associée.
Le support de T_f coïncide avec celui de f.

Exemple

On considère la fonction échelon de Heaviside H, ainsi que sa distribution T_H associée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$< T_H,\varphi >= \int_{\mathbb{R}} H(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

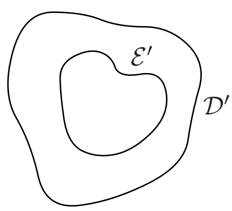
On a donc $\mathrm{Supp}(T_H) = \mathbb{R}_+$.
De même, $\mathrm{Supp}(\delta) = \{0\}$.

Définition :

Le support d'une distribution est dit limité à gauche (respectivement à droite) si il est inclus dans $\mathbb{R}_+$ (resp. si il est inclus dans $\mathbb{R}_-$).
L'ensemble des distributions à support limité à gauche (resp. à droite) est noté $\mathcal{D}'_+$ (resp. $\mathcal{D}'_-$).

Définition :

On appelle $\mathcal{E}'$ l'ensemble des distributions à support borné.



5.5 Convergence dans $\mathcal{D}'$

5.5.1 Choix de la topologie

Définition :

Soit une suite $(T_n)_n$ de distributions. On dit que $(T_n)_n$ converge vers $T \in \mathcal{D}'$ si la suite numérique $\big(< T_n,\varphi > \big)_n$ converge vers $< T,\varphi >$ quelle que soit la fonction φ prise dans $\mathcal{D}$.

Notation

On note : $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$.

Remarque

Soit $\big\{T_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\big\}$ une famille de distributions dépendant d'un paramètre λ.
On dit que $\{T_\lambda\}$ converge vers T_{λ_0} quand λ tend vers λ_0 si l'expression $< T_\lambda,\varphi >$ tend vers $< T_{\lambda_0},\varphi >$ pour tout φ de $\mathcal{D}$.
On note alors :

$$\underset{\lambda\to\lambda_0}{\text{l.i.m}}\, T_\lambda = T_{\lambda_0}$$

5.5.2 Suites de Dirac

Définition :

Soit f sommable telle que $\displaystyle\int f\, d\mu = 1$.
Soit $x \mapsto f_n(x) = n\, f(nx)$.
Pour tout n entier naturel, la fonction f_n est sommable et $\displaystyle\int f_n\, d\mu = 1$.
Soit T_{f_n} la distribution régulière associée à f_n.
La suite $\big(T_{f_n}\big)_n$ est appelée <u>suite de Dirac</u> associée à f.

Proposition

La suite de Dirac associée à f converge vers la distribution de Dirac δ :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_{f_n} = \delta$$

Exemples

1. Reprenons la fonction de Schwartz :

$$\zeta : \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\gamma(x) = \dfrac{\zeta(x)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(u)\, du}$ (fonction ζ dont l'aire est normalisée à 1).
Soit (γ_n) la suite de Dirac associée à γ :

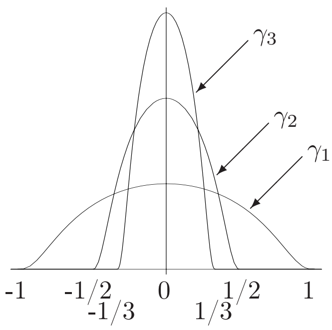
$$\gamma_n(x) = n\, \gamma(nx)$$

La suite $\big(T_{\gamma_n}\big)$ converge vers δ :

$$\lim_{n\to\infty} \int n\, \gamma_n(nx)\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \varphi(0)$$

soit encore, de façon équivalente :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_{\gamma_n} = \delta$$



2. La suite de Dirac associée à $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ converge vers δ

5.6 Dérivée d'une distribution

Définition :

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On appelle dérivée de T, notée T', la distribution définie par :

$$< T',\varphi >= - < T,\varphi' > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Proposition

Toute distribution est indéfiniment dérivable, et

$$< T^{(n)},\varphi >= (-1)^n \ < T,\varphi^{(n)} >$$

Exemple

On considère la distribution de Heaviside T_H. On a pour toute fonction φ appartenant à $\mathcal{D}$:

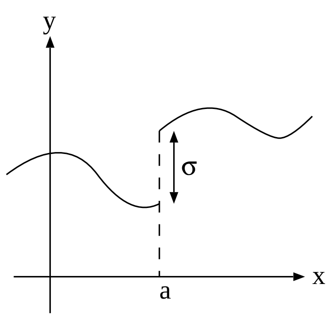
$$< T'_H,\varphi >= - < T_H,\varphi' >= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) =< \delta,\varphi >$$

Donc la dérivée de T_H est la distribution de Dirac.

Proposition

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en $x = a$ où elle admet une discontinuité de première espèce.
En notant $\sigma = f(a^+) - f(a^-)$ (amplitude du saut en a), et en supposant $f'(a^+)$ et $f'(a^-)$ finis, on a :

$$\boxed{T'_f = T_{f'} + \sigma\delta_{(a)}}$$



Exemple

Cas de la distribution de Heaviside :

$$T'_H = T_{H'} + \sigma\,\delta = \delta$$

($T_{H'} = 0$ car H' est nulle presque partout et $\sigma = 1$)

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Soit T_φ la distribution associée à φ.
La dérivée du produit $T_\varphi T$, avec T quelconque donne :

$$(T_\varphi T)' = T_\varphi T' + T'_\varphi T$$

5.7 Convergence de la suite des distributions dérivées

Proposition

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions et soit T appartenant à $\mathcal{D}'$.
Si $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$, alors :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T'_n = T'$$

Exemple

Soit la fonction f définie par $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$.

f est sommable, de classe C^∞ et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n\, f(nx)$.

D'après le résultat précédent, on a, avec les notations usuelles :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \left(T_{f_n}\right)' = \delta'$$

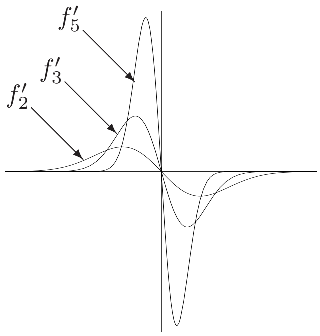
soit encore :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} (T_{f'_n}) = \delta'$$

car f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{n^3 x}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\, \varphi(x)\, dx = -\varphi'(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$



5.8 Utilisation des distributions en mécanique

Nous allons appliquer la théorie des distributions à la dynamique du point matériel. En effet, les distributions sont recommandées par exemple dans les problèmes traitant des chocs de deux particules, car l'interaction est alors ponctuelle dans le temps, discontinue et non dérivable vis-à-vis des fonctions comme l'impulsion.

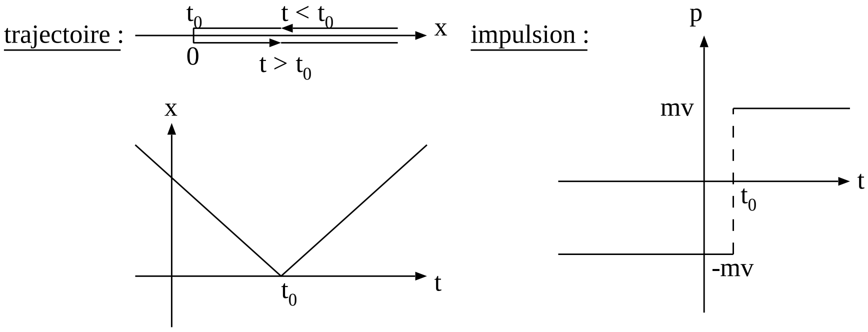
Soit une particule ponctuelle de masse m se déplaçant sur l'axe des x :

$$x(t) = v\,|t - t_0|, \quad v > 0,\, t_0 \in \mathbb{R}$$

Au temps $t = t_0$ la particule "heurte l'origine". On a donc :

$$p(x) = \begin{cases} -mv & \text{si } t < t_0, \\ mv & \text{si } t > t_0, \end{cases}$$

Au sens des fonctions, $\dfrac{dp}{dt} = 0$ presque partout.
On considère T_p la distribution associée à l'impulsion p. On a $T'_p = 2mv\,\delta_{(t_0)}$. D'après le principe fondamental de la dynamique la force s'exerçant sur la particule durant le choc est donc une distribution singulière. En physique, on note : $F = 2mv\,\delta(t - t_0)$



Remarque

$\delta_{(t_0)}$ a pour dimension l'inverse d'un temps :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt &= \varphi(0) \end{aligned}$$

5.9 Produit de convolution

Soit $S \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Alors $< S_y, \varphi(x+y) >$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de x, la notation S_y signifiant que la distribution ne s'applique qu'à la variable y. On gardera ces notations tout au long de cette partie.

Définition :

Soient T et S deux distributions. On appelle produit de convolution de T et S, noté $T * S$, la distribution définie, si elle existe, par :

$$T * S : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \quad < T_x, < S_y, \varphi(x+y) >> \end{cases}$$

Remarque

$S * T$ n'existe pas toujours : il faut que $< S_y, \varphi(x+y) >$ appartienne à $\mathcal{D}$ ce qui n'est pas assuré dans le cas général.

Proposition

Si $T * S$ existe , alors on a $T * S = S * T$.

Proposition : conditions suffisantes d'existence du produit

Soient T et $S \in \mathcal{D}'$.

1. *a) si T ou S est dans $\mathcal{E}'$, alors $T * S$ est défini*
   b) si T et S sont dans $\mathcal{E}'$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{E}'$
2. *a) si T et S sont dans $\mathcal{D}'_+$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{D}'_+$*
   b) si T et S sont dans $\mathcal{D}'_-$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{D}'_-$

Proposition

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On a :

1. $\delta * T = T$
2. $\delta' * T = T'$

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}'$.

$$\begin{aligned} < \delta * T,\varphi > &= < \delta_x, < T_y,\varphi(x+y) >> \\ &= < T_x, < \delta_y,\varphi(x+y) >> \\ &= < T_x,\varphi(x) > \\ &= < T,\varphi > \\ < \delta' * T,\varphi > &= < T_x, < \delta'_y,\varphi >> \\ &= < T_x, -\varphi'(x) > \\ &= - < T,\varphi' > \\ &= < T',\varphi > \end{aligned}$$

Proposition

Si on considère la fonction translation définie par :

$$\tau_{(a)} = \begin{cases} I\!R & \longrightarrow & I\!R \\ x & \longmapsto & x-a \end{cases}$$

Alors $\forall T \in \mathcal{D}'$*, on a :*

$$\delta_{(a)} * T = T \circ \tau_{(a)}$$

Cas particulier

Soient a et b deux réels.

$$\delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

Proposition

Soit T *et* $S \in \mathcal{D}'$*. Si* $T * S$ *existe, alors on a :*

$$(T*S)' = T' * S = T * S'$$

Remarque

Cette proposition peut être généralisé à l'ordre n :

$$\boxed{(T*S)^{(n)} = T * S^{(n)} = T^{(n)} * S}$$

Preuve

Par définition, on peut écrire pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \left\langle (S*T)^{(n)},\varphi \right\rangle &= (-1)^n \left\langle S * T^{(n)} \right\rangle \\ &= (-1)^n \left\langle S(x), \left\langle T(y),\varphi^{(n)}(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle S(x),(-1)^n \left\langle T(y),\varphi^{(n)}(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle S(x), \left\langle T^{(n)}(y),\varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle S * T^{(n)},\varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Remarque

Le produit de convolution n'est en général pas associatif :

$$(T_H * \delta') * 1 = \delta * 1 = 1$$
$$T_H * (\delta' * 1) = T_H * 0 = 0$$

5.10 Transformée de Fourier des distributions

5.10.1 Introduction

Le but de cette partie est que l'on puisse arriver à quelque chose du type :

$$< \mathcal{F}[T_f],\varphi >=< T_f,\mathcal{F}[\varphi] >$$

Avec $\mathcal{F}[\varphi] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int e^{-ikx}\,\varphi(x)\,d\mu(x)$.
Pour cela il faut que $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas assuré : si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}[\varphi]$ n'est pas a support borné (sauf pour la fonction nulle).
On introduit donc un espace fonctionnel $\mathcal{S}$ tel que :

$$\varphi \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$$

5.10.2 Espace fonctionnel $\mathcal{S}$

Définition :

On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et telles que :

$$\forall p,q \in \mathbb{N} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p\,\varphi^{(q)}(x)| < +\infty$$

Cet ensemble est appelé espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide (les fonctions de cet espace décroissent plus vite que n'importe quelle loi de puissance en x).

Exemple
La fonction $x \mapsto x^3\,e^{-x^2}$ vérifie les conditions énoncées précédemment. Elle est donc dans $\mathcal{S}$ mais elle n'est pas dans $\mathcal{D}$ (elle n'est pas à support borné).

Proposition

1. *$\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \varphi' \in \mathcal{S}$*
2. *$\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow x^p\,\varphi^q(x)$ est sommable*
3. *$\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{F}[\varphi]$ et $\mathcal{F}^-[\varphi]$ existent et sont dans $\mathcal{S}$.*
   De plus on a : $\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^-[\varphi]\big] = \mathcal{F}^-\big[\mathcal{F}[\varphi]\big]$

Définition : Choix de convergence

Soit (φ_n) une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ et soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On dit que (φ_n) converge vers φ si et seulement si pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, la suite $\big(x^p\,\varphi_n^{(q)}\big)_n$ converge vers $x^p\,\varphi^{(q)}$ de manière uniforme.

Proposition

$\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$ pour ce choix de convergence.

Définition :

On appelle $\mathcal{S}'$ le dual de $\mathcal{S}$ et on le nomme ensemble des distributions tempérées.
L'ensemble des distributions tempérées est inclus strictement dans $\mathcal{D}'$.

5.10.3 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Définition :

Soit $T \in \mathcal{S}'$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a :

$$< \mathcal{F}[T],\varphi >=< T,\mathcal{F}[\varphi] >$$

Proposition

Si $T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathcal{F}[T] \in \mathcal{S}'$.

Remarque

Les résultats présentés ici sont les mêmes si on considère la transformée inverse $\mathcal{F}^-$.

Exemple

On vérifie facilement que $\delta \in \mathcal{S}'$. En écrivant la définition de la transformée de Fourier de δ, on trouve sans aucun problème : Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}[\delta],\varphi > &= < \delta,\mathcal{F}[\varphi] > \\ &= < \delta,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx}\, \varphi(x)\, d\mu(x) > \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

où $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est la distribution régulière associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_{(a)}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iak} \qquad a \in \mathbb{R} \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta \\ \mathcal{F}^-[\delta] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}[\delta'] &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}\left[-\frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta' \end{aligned}$$

Remarque

En physique :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dx$$

On a donc :

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dx$$

Cette expression n'a pas de sens au niveau mathématique car la fonction $x \longmapsto e^{ikx}$ n'est pas sommable.

Proposition

Soit (T_n) une suite de distributions de $\mathcal{S}'$, et soit $T \in \mathcal{S}'$.
Si $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$, alors $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \mathcal{F}[T_n] = \mathcal{F}[T]$.

Proposition

On a :

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

(toute distribution à support borné est tempérée).

Proposition

Soit $T \in \mathcal{E}'$. On montre que $\mathcal{F}[T]$ est régulière et est associée à la fonction de classe C^∞ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ k & \longmapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < T_x,e^{-ikx} > \end{cases}$$

5.10.4 Transformée de Fourier du produit de convolution

Proposition

Soient $S \in \mathcal{S}'$ et $T \in \mathcal{E}'$. On a :

$$\mathcal{F}[T * S] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[T]\,\mathcal{F}[S]$$

(ce qui comprend l'existence des deux termes)

5.11 Distribution dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3)$
$r = ||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
On définit :

– $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$, l'ensemble des fonctions $\begin{array}{ccc} [t]\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \varphi(x_1,x_2,x_3) \end{array}$, $\mathcal{C}^\infty$ à support borné.

Exemple

Soit $\mathcal{S} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } r \geqslant 1 \\ e^{-\frac{1}{1-r^2}} & \text{si } r < 1 \end{cases} \end{array} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$

– $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$, le dual de $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$, linéaire et continue. $T : \begin{cases} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \quad < T,\varphi > \end{cases}$

Exemple

La distribution de Dirac : $\delta_{3\text{d}} \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\delta \quad : \quad \begin{cases} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi(\overrightarrow{x}) & \longmapsto \quad \varphi(\overrightarrow{0}) = \varphi(x_1 = 0,x_2 = 0,x_3 = 0) \end{cases}$$

Remarque

Les physiciens définissent une fonction δ telle que : $\delta_{3\text{d}} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$.

$$\int \varphi(\overrightarrow{x})\delta_{3\text{d}}(\overrightarrow{x})d^3x = \varphi(\overrightarrow{0}).$$

5.11.1 Dérivées partielles

Soit $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$.

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i},\varphi \right\rangle = -\left\langle T,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Exercice

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \end{cases}$$

Cette fonction est radiale (elle ne dépend que de $||\overrightarrow{x}||$).
Calculons $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ (pour étudier la distribution de charge à l'origine) dans $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

- Ainsi, les fonctions $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ radiales, vérifient : $\Delta f = 0$.

Comme $\Delta f = \dfrac{d^2 f}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$, alors : $\boxed{f = \dfrac{A}{r} + B}$ $\quad A,B$ctes.

Soit la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \frac{1}{r} = \frac{1}{||\overrightarrow{x}||} \end{array}$.

$\frac{1}{r}$ est localement sommable dans $\mathbb{R}^3$, on peut lui associer une distribution régulière.

$$\left\langle \frac{1}{r},\varphi \right\rangle = \int \frac{1}{r}\varphi\left(\overrightarrow{x}\right) d^3x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right).$$

- $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta\left(\frac{1}{r}\right),\varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{r},\Delta\varphi \right\rangle \\ &= \int \frac{1}{r}\Delta\varphi d^3x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_{\text{Espace } \backslash \mathcal{S}(0,\varepsilon)} \frac{\Delta\varphi}{r} d^3x}_{I_\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int d^3x\Delta\varphi\frac{1}{r} \\ &= \underbrace{\int_{r>\varepsilon} d^3x\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\varphi}_{\text{Th de Green } =0} + \int_{r=\varepsilon} \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma_\varepsilon \end{aligned}$$

avec $d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta \qquad \text{dans } \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)}$$