

Chapitre 4

Transformation de Laplace

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est localement sommable si elle est sommable sur tout sous ensemble E de \mathbb{R} de mesure finie.

4.1 Définition

Définition :

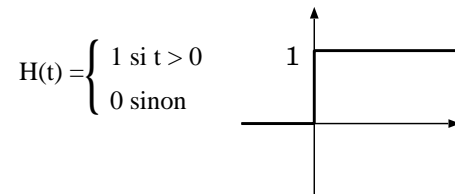
Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace l'application définie par :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ s & \longmapsto \mathcal{L}[f](s) = \int f(t) e^{-st} d\mu(t) \end{cases}$$

Cette application existe sous réserve de sommabilité de la fonction $t \mapsto f(t) e^{-st}$.

Exemples

- transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside.



$$\int H(t) e^{-st} d\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

C'est une intégrale impropre de Riemann divergente pour $s \leq 0$ et convergente pour $s > 0$. La transformée de Laplace de H n'est définie que pour $s > 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$$

- la transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside H translaté de $a > 0$ est $\mathcal{L}(H_a)(s) = \frac{1}{s} e^{-sa}$, $s > 0$
- Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} e^{(a+ib)t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s - (a + ib)} \quad \text{pour } s > a$$

4.2 Abscisse de sommabilité

Définition :

Soit f une application sommable et nulle pour $t < 0$.

On peut montrer qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$, appelée abscisse de sommabilité de la transformée de Laplace de f , telle que :

- $\forall s > s_0$ la fonction $t \mapsto f(t) e^{-st}$ est sommable (et donc la transformée de Laplace de f existe)
- $\forall s < s_0$ la fonction $t \mapsto f(t) e^{-st}$ n'est pas sommable. Pour $s = s_0$ il peut ou non y avoir sommabilité.

Remarque

- si $s_0 = -\infty$, la transformée de Laplace de f est définie sur tout \mathbb{R}
- si $s_0 = +\infty$, f n'admet pas de transformée de Laplace.

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f = 0$ sur \mathbb{R}_- alors $s_0 \leq 0$.

Proposition

Si, pour tout t suffisamment grand,

$$|f(t)| \leq A e^{kt}, \quad A \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{R}$$

alors

$$s_0 \leq k$$

4.3 Propriétés de la transformée de Laplace

4.3.1 Premières propriétés

Propriétés

1. La transformée de Laplace est une application linéaire
2. Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \quad s > as_0$$

3. Avec les mêmes hypothèses et $a \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)](s) \quad s > s_0$$

4. Avec les mêmes hypothèses et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}[e^{bt} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-b) \quad s > s_0 + b$$

5. $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$

Théorème de la valeur initiale

Si quand t tend vers 0 f admet une limite à droite notée $f(0^+)$ alors :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}[f](s) = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale

Si f admet une limite en $+\infty$, notée $f(+\infty)$, alors $s_0 \leq 0$ et :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[f](s) = f(+\infty)$$

4.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée

Proposition

Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$, possédant sur \mathbb{R}_+^* une dérivée continue (ou continue par morceaux), localement sommable. De plus on suppose que pour t assez grand,

$$|f(t)| \leq A e^{kt}, \quad (A, k) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$$

Alors :

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \quad s > k$$

4.4 Produit de convolution

Proposition

Soient f_1, f_2 deux fonctions localement sommables, nulles pour $t < 0$, d'abscisses de sommabilité respectives s_{01} et s_{02} .

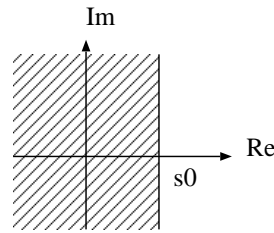
On a alors, pour $s > s_0 = \max(s_{01}, s_{02})$

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1] \mathcal{L}[f_2]$$

4.5 Analyticité de la transformée de Laplace

On considère maintenant la transformée de Laplace comme une fonction de la variable complexe :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \mathcal{L}[f](z) = \int f(t) e^{-zt} d\mu(t) \end{cases} \quad \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$$



Théorème

La transformée de Laplace est analytique sur le domaine de sommabilité $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$ et on a la formule :

$$(\mathcal{L}[f(t)](z))^{(n)} = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](z)$$

4.6 Lien avec la transformée de Fourier

Proposition

Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. On a, sur le domaine de sommabilité, en posant $z = x + iy$, et en raisonnant à $x > s_0$ fixé :

$$\mathcal{L}[f](z) = \int f(t) e^{-xt} e^{-iyt} d\mu(t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f(t) e^{-xt}](y)$$

4.7 Inversion de la transformée de Laplace

Proposition : formule de Bromvitch

On suppose que pour $x > s_0$, la fonction $y \mapsto \mathcal{L}[f](x + iy)$ est une fonction sommable. D'après les résultats sur la transformée de Fourier, on a, pour presque tout t :

$$\sqrt{2\pi} f(t) e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{L}[f](z) e^{iyt} d\mu(y) \quad x > s_0$$

On a donc, presque partout, avec $V_x = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$:

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \mathcal{L}[f](z) e^{zt} dz = \frac{1}{2i\pi} \int \mathcal{L}[f](x+iy) e^{(x+iy)t} i d\mu(y)$$

Exemple

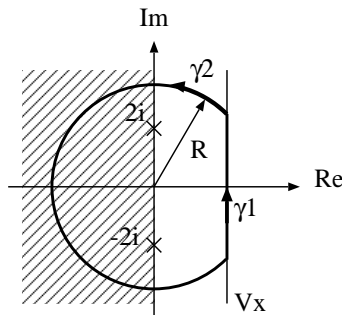
$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est nulle pour $t < 0$ et localement sommable. On a :

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad s > s_0 = 0$$

Transformée de Laplace inverse : $\frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz$ possède deux singularités en $\pm 2i$, avec :

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z}{z^2 + 4} e^{zt}, 2i \right) = \frac{e^{2it}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Res} \left(\frac{z}{z^2 + 4} e^{zt}, -2i \right) = \frac{e^{-2it}}{2}$$



$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz = i\pi (e^{2it} + e^{-2it})$$

Puis, en utilisant les lemmes de Jordan :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz = \cos 2t$$

Transformées de Laplace usuelles (avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t_0 > 0$)

$f(t) (t \geq 0)$	$\mathcal{L}[f](s)$	s_0
c	$\frac{c}{s}$	0
ct^n	$\frac{cn!}{s^{n+1}}$	0
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	0
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	0
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	a
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	a
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$ a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$ a $
$e^{at} \sin bt$	$\frac{a}{(s - a)^2 + b^2}$	a
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	a
$t^{1/2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{s^3}\right)^{1/2}$	0
$t^{-1/2}$	$\left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$	0
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	0
$H(t - t_0)$	$\frac{e^{-st_0}}{s}$	0

