Chapitre 3

Transformation de Fourier

3.1 Définition et premières propriétés

3.1.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction de la variable $k \in \mathrm{I\!R}$, notée F ou $\mathcal{F}[f]$, telle que :

$$\boxed{\mathcal{F}[f](k) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-ikx}\, d\mu(x)}$$

Cette définition peut différer d'une constante dans certains ouvrages.

Remarques

- Pour que cette expression ait un sens il faut que $f(x)\, e^{-ikx}$ soit sommable, ce qui est assuré par le fait que $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$
- Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ telles que $f = g$ presque partout sur $\mathrm{I\!R}$ alors $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$, on a :

1. *$\mathcal{F}[f]$ est bornée*
2. *$\mathcal{F}[f]$ est continue*
3. $\lim_{|k| \to +\infty} \mathcal{F}[f] = 0$

Exemples

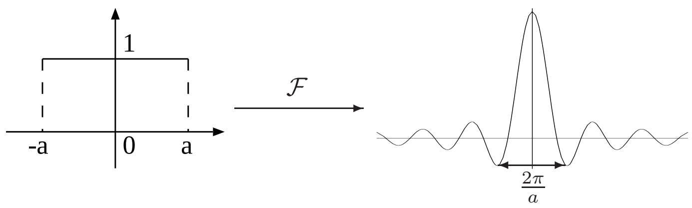
- On considère la fonction f définie par :

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-a,a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad a > 0$$

Sa transformée de Fourier est définie pour tout k réel comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-ikx}\, d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, \frac{\sin ka}{ka} \end{aligned}$$

Remarque : la transformée de Fourier n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.



– On considère la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$, avec $a \in \mathbb{R}_+$. La transformée de Fourier de f est aussi une gaussienne, et s'exprime comme :

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Si on considère la largeur du pic à $1/e$ du maximum, on trouve que le produit $\Delta x \Delta k$ est constant (cf principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique).
Remarque : pour calculer la transformée de Fourier de f, on utilise souvent le théorème des résidus.

3.1.2 Propriétés

Linéarité

La transformée de Fourier est une application linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions :

$$\forall (f_1,f_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ \forall (b_1,b_2) \in \mathbb{C} \quad \mathcal{F}[b_1 f_1 + b_2 f_2] = b_1\, \mathcal{F}[f_1] + b_2\, \mathcal{F}[f_2]$$

Parité et réalité

On a les résultats suivants :

f	$\mathcal{F}[f]$
paire	paire
impaire	impaire
réelle	à symétrie hermitique : $F(-k) = \overline{F(k)}$
imaginaire pure	à symétrie anti-hermitique : $F(-k) = -\overline{F(k)}$

Changement d'échelle et translation

Théorème de changement d'échelle
Soit f sommable, et $a \in \mathbb{R}^*$, alors on a :

$$\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{|a|}\, \mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{a}\right)$$

Théorème de translation
Soit f sommable, et $b \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\mathcal{F}[f(x+b)](k) = e^{ikb}\, \mathcal{F}[f](k)$$

On dit que la transformée de Fourier a subit un déphasage.

3.2 Formules

3.2.1 Transformée de Fourier de la dérivée

Théorème
Soit f une fonction sommable et partout continue, dérivable presque partout et telle que f' soit sommable. Alors on a :

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik\, \mathcal{F}[f](k)$$

Théorème : généralisation

Soit f telle que ses $m-1$ dérivées existent et soient sommables, partout continues, et telle que la dérivée d'ordre m de f existe presque partout et soit sommable. Alors :

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](k) = (ik)^m\,\mathcal{F}[f](k)$$

De ces deux théorèmes, ont peut déduire un résultat concernant la vitesse de décroissance vers zéro de la transformée de Fourier de f en fonction de l'ordre maximal de dérivation de f. En effet, si f est telle que $f^{(m)}$ soit sommable et définie presque partout, alors sa transformée de Fourier est bornée :

$$\exists M > 0,\ \forall k \in \mathbb{R},\ |(ik)^m\,\mathcal{F}[f](k)| \leqslant M$$

Donc , si $k \neq 0$, on a :

$$|\mathcal{F}[f](k)| \leqslant \frac{M}{|k|^m}$$

On voit donc que si f est indéfiniment dérivable, et que toutes ses dérivées sont sommables, la transformée de Fourier de f décroît à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{|k|}$, ce qui se vérifie aisément en prenant l'exemple d'une fonction gaussienne.

3.2.2 Transformée de Fourier de $x \mapsto xf(x)$

Théorème

Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par $x \mapsto xf(x)$, avec x réel, soit sommable sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}[f(x)](k)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\mathcal{F}[x\,f(x)](k) = i\,\frac{d}{dk}\mathcal{F}[f](k)$$

Théorème : généralisation

Soit f sommable sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction $x \mapsto x^m f(x)$ soit sommable sur $\mathbb{R}$. Alors la transformée de Fourier de f est m fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathcal{F}\left[x^m f(x)\right](k) = i^m\,\frac{d^m}{dk^m}\mathcal{F}[f](k)$$

3.2.3 Produit de convolution

Définition du produit de convolution

Soient f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$.
L'intégrale $\displaystyle\int f(x-x')\,g(x')\,d\mu(x')$ existe pour presque tout x, et définit une fonction $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ appelée produit de convolution de f et g et notée $f * g$:

$$\boxed{\big(f * g\big)(x) = \int f(x-x')\,g(x')\,d\mu(x')}$$

Proposition

Le produit de convolution est commutatif

$$f * g = g * f$$

Théorème

Soit f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]}$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f](k)\,\mathcal{F}[g](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(X)\,e^{-ikX}\,d\mu(X) \int g(X')\,e^{-ikX'}\,d\mu(X') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint f(X)\,e^{-ikX}\,g(X')\,e^{-ikX'}\,d\mu(X)\,d\mu(X') \\
&\qquad \text{(en posant } x = X + X' \text{ et } x' = X'\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-x')\,g(x')\,e^{-ikx}\,d\mu(x)\,d\mu(x') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\int f(x-x')\,g(x')\,d\mu(x') \right) e^{-ikx}\,d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \big(f * g\big)(x)\,e^{-ikx}\,d\mu(x) \\
&= \mathcal{F}[f * g](k)
\end{aligned}
$$

3.2.4 Inversion de Fourier

Théorème d'inversion

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soit F sa transformée de Fourier. Si F est sommable alors on a presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k)\,e^{+ikx}\,d\mu(k)$$

Définition :

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On définit l'opérateur inverse $\mathcal{F}^-$ par :
$\mathcal{F}^-[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\,e^{+ikx}\,d\mu(k)$

Proposition

Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$. Si sa transformée de Fourier F est sommable sur $\mathbb{R}$, alors presque partout on a :

$$f(x) = \mathcal{F}^-\big[\mathcal{F}[f]\big](x)$$

3.2.5 Application à la résolution d'une équation intégrale

On considère l'équation intégrale de type Fredholm, où f est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$:

$$\int f(x-x')\,f(x')\,d\mu(x') = \frac{1}{x^2+1}$$

On reconnaît l'expression du produit de convolution de f par elle même, donc on a :

$$\sqrt{2\pi}\,\big(\mathcal{F}[f](k)\big)^2 = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\pi\,e^{-|k|}$$

On a donc :

$$\mathcal{F}[f](k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-|k|/2}$$

On applique maintenant l'opérateur inverse, et on obtient finalement :

$$f(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{4x^2+1}$$

3.2.6 Fonctions sommables, de carré sommable

Théorème de Plancherel

Soit f une fonction sommable et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors sa transformée de Fourier F est de carré sommable et on a la relation :

$$\int |f(x)|^2\, d\mu(x) = \int |F(k)|^2\, d\mu(k)$$

3.2.7 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $\overrightarrow{x} = (x_1,...,x_n)$ et $\overrightarrow{k} = (k_1,...,k_n)$. On définit un produit scalaire et une norme :

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{k} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, k_i \qquad \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Définition :

Avec ces notations, on considère f une fonction sommable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. On définit la transformée de Fourier de f par :

$$F\left(\overrightarrow{k}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\overrightarrow{x})\, e^{-i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\, d\mu(\overrightarrow{x})$$

avec : $d\mu(\overrightarrow{x}) = d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n)$

Remarque

Soit $f(x_1,x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Si $x_1\, f(x_1,x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial k_1}\mathcal{F}\big[f(x_1,x_2)\big](k_1,k_2) = -i\,\mathcal{F}\big[x_1\, f(x_1,x_2)\big](k_1,k_2)$$

Proposition

Si f est radiale, c'est à dire ne dépend que de la norme du vecteur $\overrightarrow{x}$, alors sa transformée est radiale.

Exemple

Le potentiel de Yukawa est donné par :

$$f(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{x}\|}\, e^{\lambda\,\|\overrightarrow{x}\|},\ \lambda > 0$$

C'est une fonction radiale. Sa transformée de Fourier est définie pour tout $\overrightarrow{k}$ par :

$$F\big(\overrightarrow{k}\big) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\|\overrightarrow{x}\|}\, e^{-\lambda\,\|\overrightarrow{x}\|}\, e^{-i\,\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Pour $\overrightarrow{k}$ donné on passe en coordonnées sphériques avec le vecteur $\overrightarrow{x_3}$ suivant $\overrightarrow{k}$.

$$\begin{aligned}
F\big(\overrightarrow{k}\big) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, e^{-\lambda r}\, e^{-i\,\|\overrightarrow{k}\|\, r\cos\theta}\, r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, 2\pi \int_0^{+\infty} r\, e^{-\lambda r} \left(\int_0^{\pi} e^{-i\,\|\overrightarrow{k}\|\, r\cos\theta}\, \sin\theta\, d\theta\right) dr \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\|\overrightarrow{k}\|^2 + \lambda^2}
\end{aligned}$$

F est bien une fonction radiale.