Chapitre 1

Fonctions Analytiques

1.1 Le plan complexe

1.1.1 Rappels

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\exists!\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + i\,y$.
On définit le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On peut aussi repérer z par des coordonnées polaires, en posant : $z = \rho\, e^{i\,\theta}$, avec $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $\rho = |z|$.
On a :

- si $z = 0$, alors θ n'est pas défini,
- si $z \neq 0$, alors θ est défini à $2k\pi$ près.

1.1.2 Topologie dans le plan complexe

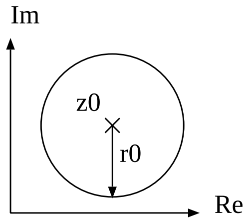
On définit une distance dans le plan complexe par :

$$\forall\ (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{d}(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$$

Définition :

On appelle **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

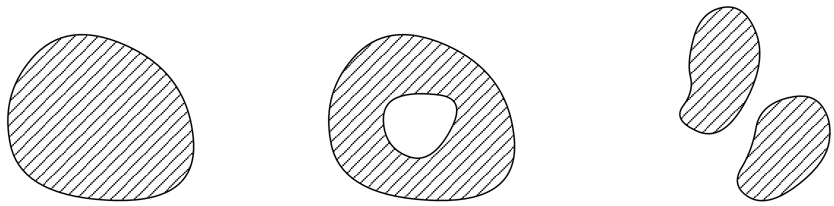
$$\mathrm{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$$



On appelle **voisinage** d'un point z_0 un disque ouvert quelconque de centre z_0.
Un sous-ensemble U est un ouvert de U si chaque z de U possède un voisinage entièrement inclus dans U.
Le **complémentaire** par rapport à $\mathbb{C}$ d'un sous-ensemble ouvert est dit fermé.
On définit le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leqslant r\}$.

Définition : Connexe

Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans U.
Si de plus U est ouvert alors il est appelé domaine.



U est simplement connexe — U est doublement connexe — U n'est pas connexe

1.2 Fonctions d'une variable complexe

1.2.1 Premières définitions

Définition :

Soit U une partie de $\mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application : $f : U \to \mathbb{C}$. On a $f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

Exemples

$$\begin{array}{rcl}
\bullet\, f: \quad \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
x+i\,y & \longmapsto & x^2 - y^2 + 2i\,x\,y \\
z & \longmapsto & z^2 \\
\bullet\, f: \quad \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
x+i\,y & \longmapsto & x - i\,y \\
z & \longmapsto & \bar{z} \\
\bullet\, f: \quad \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
x+i\,y & \longmapsto & e^x \cos y + i\,e^x \sin y \\
z & \longmapsto & e^z \qquad \text{(exponentielle complexe)} \\
\bullet\, f: \quad \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
x+i\,y & \longmapsto & \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} \cos x + i\,\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2} \sin x = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\
z & \longmapsto & \cos z \qquad \text{(cosinus complexe)}
\end{array}$$

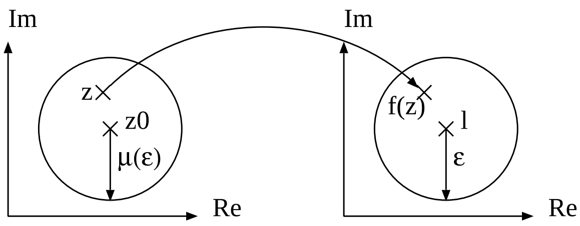
1.2.2 Limites et continuité

Limites

Dans la suite du paragraphe, on utilisera $f : U \to \mathbb{C}$.

Définition :

Soit $z_0 \in U$. On dit que f tend vers une limite l quand $z \to z_0$ si :
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \mu(\varepsilon)$ tel que $|z - z_0| < \mu \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$



Remarque

D'après la définition, f a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que f n'admet pas de limite en un point il suffit de trouver deux directions d'approche de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l'une ou l'autre.

Exemple

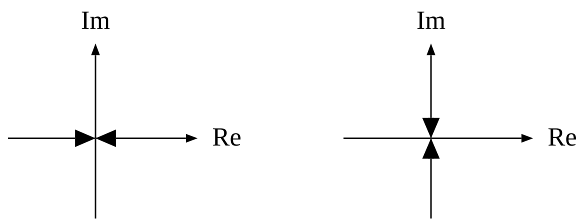
$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{C} \\ & x + i\,y & \longmapsto & \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\,\dfrac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z}{\bar{z}} \end{array}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Pour $y \in i\mathbb{R}$:

$$\lim_{y \to 0} f(i\,y) = -1$$



f n'a donc pas de limite en 0.

Définition :

On dit que f admet une limite l quand $|z|$ tend vers $+\infty$ si : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists A(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tel que $|z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

Continuité

Définition :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et f définie sur un voisinage de z_0. On dit que f est continue en z_0 si :
- f admet une limite finie en z_0
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ coïncide avec $f(z_0)$

Proposition

f est continue si et seulement si les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ définies précédemment sont continues.

Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

Définition :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit f définie et continue sur un voisinage de z_0. On dit que f est dérivable en z_0 si l'expression :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite quand z tend vers z_0.
On note alors cette limite $f'(z_0)$.

Exemple

Considérons la fonction f définie et continue sur $\mathbb{C}$, et telle que $f(z) = |z|^2$. f est-elle dérivable ?
On a :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z}$$

- Si $z_0 = 0$, alors $f'(z_0) = 0$, f est donc dérivable en 0.
- Si $z_0 \neq 0$, alors on se ramène à l'exemple précédent.

Donc f n'est pas dérivable en dehors de 0.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f,g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dérivables. On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda f)' &= \lambda f' \\
(f+g)' &= f' + g' \\
(f\,g)' &= f'\,g + f\,g' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2}, \textit{ avec } g(z) \neq 0 \\
(f \circ g)' &= g'\,(f' \circ g)
\end{aligned}$$

Conditions de Cauchy-Riemann

Proposition

Soit $f = u + i\,v$ une fonction définie et continue sur un voisinage de z_0. Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + i\,y_0$, alors u et v admettent en (x_0,y_0) des dérivées partielles premières par rapport à chacune de leurs variables, et on a :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \textit{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Démonstration

Par hypothèse f est dérivable en z_0, donc $f'(z_0)$ existe.
Pour démontrer Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour aller vers z_0 et on va utiliser le fait que la limite de $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$ en z_0 est la même suivant toutes les directions.

- approche suivant l'axe réel ($\Delta y = 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} \\
&\quad + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

– l'approche suivant l'axe imaginaire donne :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

On obtient la condition de Cauchy-Riemann en égalant les deux résultats.

Remarque

Cette proposition n'admet pas de réciproque si on ne suppose rien d'autre sur les fonctions coordonnées u et v de f, car on ne considère que deux directions d'approche particulières de z_0.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

f est continue en tout point de $\mathbb{C}$ et vérifie les relations de Cauchy-Riemann en 0. Cependant on voit que :

– suivant l'axe réel : $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = 1+i$

– suivant la première bissectrice : $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1+i}{2}$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, malgré le fait qu'elle vérifie les relations de Cauchy-Riemann.

Proposition

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de z_0 et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$, alors f est dérivable en z_0.

Proposition

En pratique,pour calculer l'expression de $f^{'}(z)$ quand f est donnée à partir de u et v, on utilise l'une des formules déduites de la démonstration des relations de Cauchy-Riemann :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} (= \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial y})$$

Fonctions analytiques (ou holomorphes)

Définition :

On dit d'une fonction f qu'elle est analytique dans un ouvert U du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de U.

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω. Si u et v sont de classe C^2 sur Ω, alors u et v satisfont l'équation de Laplace dans Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Démonstration

On utilise Cauchy-Riemann et le théorème de Schwartz d'interversion des dérivées partielles pour une fonction de classe C^2 de deux variables.

Fonctions entières

Définition :

On appelle fonction entière une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$.

Exemples

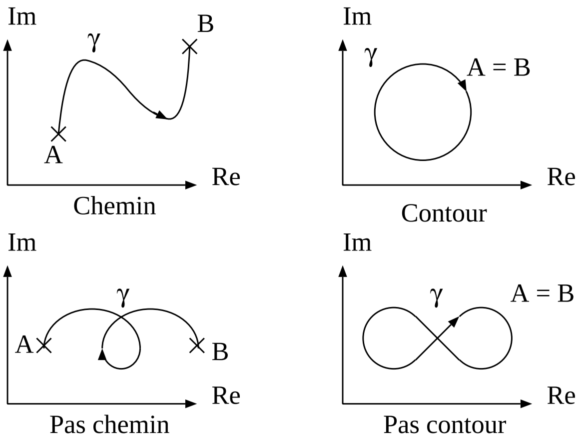
$f(z) = \exp z$ et $f(z) = z^2$ sont des fonctions entières.

1.3 Intégration dans le plan complexe

1.3.1 Introduction

Définition :

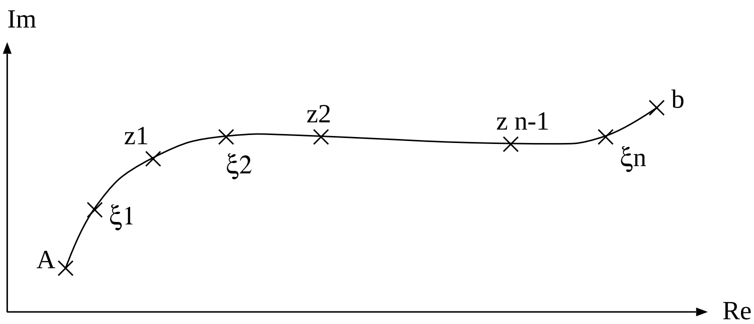
Soit $\gamma \ : \ J = [t_a,t_b] \to \mathbb{C}$, avec $[t_a,t_b] \subset \mathbb{R}$, tel que :
•γ peut être décrite par $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ où x et y sont continues sur J et x' et y' continues par morceaux sur J
•γ est injectif, sauf peut-être aux extrémités (pas de points multiples, sauf éventuellement a=b).
Alors γ est appelé chemin.
Si de plus $a = b$, γ est appelé contour.
(N.B. : Cette définition assez restrictive d'un chemin ne correspond pas à la définition plus générale que l'on trouve dans les ouvrages de références, mais sera néanmoins suffisante dans le cadre du cours)



1.3.2 Intégration le long d'un chemin

Soit γ un chemin et soit f définie en tout point de ce chemin. Soit $\{z_0,...,z_n\}$ une subdivision de γ, avec $z_0 = a$ et $z_n = b$. Soient de plus $\xi_1,...,\xi_n$ tels que $\forall\ i \in [1,n]$, $\xi_i \in\,]z_{i-1},z_i[$. On définit la suite :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$



Définition :

Si, quand $n \to \infty$ de manière à ce que $|z_k - z_{k-1}| \to 0$ pour tout k de $[1,n]$, la somme I_n tend vers une limite indépendante du choix des z_k et des ξ_k, alors cette limite est appelée intégrale de f le long de γ et est notée :
$\int_\gamma f(z)\ dz$

Propriété

Si f est continue sur γ, alors son intégrale le long de γ existe.

Si on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, on a :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \big[u(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k)\,(y_k - y_{k-1})\big]$$

$$+\ i \sum_{k=1}^{n} \big[v(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k)\,(y_k - y_{k-1})\big]$$

donc dans les mêmes conditions que tout à l'heure, en faisant tendre n vers l'infini, on a :

$$I = \int_\gamma (udx - vdy)\ + i \int_\gamma (vdx + udy)$$

Les deux intégrales curvilignes qui apparaissent dans l'expression de I peuvent être réduites à des intégrales ordinaires en utilisant le paramétrage de γ : $z(t) = x(t) + i\,y(t)$. On obtient alors :

$$\boxed{I = \int_{t_a}^{t_b} f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt}$$

Exemples

1. On considère $f(z) = z$, intégré sur γ paramétré par $z(t) = R\,e^{2i\pi t}$.
   Alors :
   – si $t \in [0,\frac{1}{4}]$, on a :
   $$I = \int_0^{\frac{1}{4}} R\,e^{2i\pi t} \times R\,2i\pi e^{2i\pi t} dt = -R^2$$
   – si $t \in [0,1]$, on a $I = 0$
2. On considère $f(z) = \dfrac{1}{z}$, intégré sur $\gamma : z(t) = R\,e^{2i\pi t}$, $t \in [0,1]$.
   $$I = \int_0^1 \frac{2i\pi R\,e^{2i\pi t}}{R\,e^{2i\pi t}}\, dt = 2i\pi$$
   NB : le résultat est indépendant de R.

Cas particulier

Soit f admettant une primitive, i.e. $\exists\, F$ telle que $F' = f$ sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$.
On intègre f sur un chemin γ contenu dans Ω, et on a :

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a)$$

si a et b sont les extrémités du chemin considéré.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $f(z) = z$ et $\gamma : t \in [0,\frac{1}{4}] \longmapsto R\,e^{2i\pi t}$.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \left[\frac{1}{2}\, z^2\right]_R^{iR} = -R^2$$

1.3.3 Inégalité de Darboux

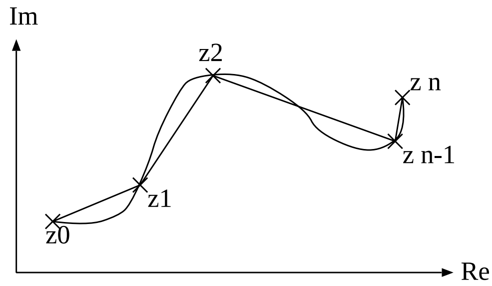
Proposition

Soit f intégrable sur un chemin γ de longueur curviligne L.
Soit $M = \sup_\gamma(|f|)$ (on suppose que M est fini).
Alors on a :

$$\boxed{|I| \leqslant M\,L}$$

Démonstration

En utilisant l'inégalité triangulaire sur un élément de la suite I_n, et en utilisant le fait que $|f| \leqslant M$, et que $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leqslant L$, on a le résultat de la proposition.



Jusqu'à maintenant, on n'a fait aucune hypothèse particulière sur les fonctions considérées, on ne s'est intéressé qu'aux fonctions continues sur γ.

1.4 Intégration de fonctions analytiques

1.4.1 Théorème de Cauchy et conséquences

Théorème de Cauchy

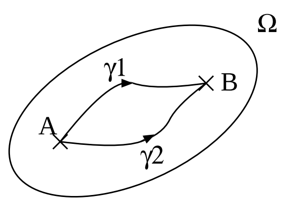
Soit un domaine Ω simplement connexe, soit f analytique sur Ω, et soit γ un contour quelconque contenu dans Ω.
Alors

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

Proposition

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe, soit A et B deux points de ce domaine et soit γ_1 et γ_2 deux chemins contenus dans Ω et ayant pour extrémités A et B, alors on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

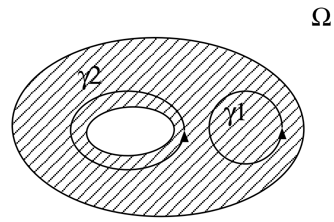


Démonstration

On intègre f sur le contour $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$, où $-\gamma_2$ correspond au chemin γ_2 parcouru en sens inverse, et on utilise la linéarité de l'intégrale.

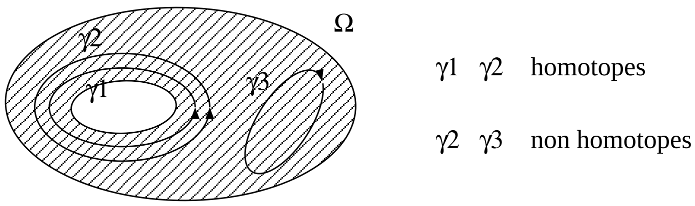
Remarque

Si le domaine n'est pas simplement connexe, le théorème ne s'applique pas :
$\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$ mais en général $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \neq 0$.



Définition :

• Soit γ_1 et γ_2 deux contours d'un domaine Ω. On dit que ces deux contours sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue en restant dans Ω.



• Un contour est dit homotope à un contour ponctuel dans Ω s'il est homotope à un contour réduit à un point appartenant à Ω.
• Un domaine Ω est simplement connexe si tout contour de Ω est homotope à un contour ponctuel.
• Un domaine Ω multiplement connexe est un domaine simplement connexe dont on a retiré un ou plusieurs domaines simplements connexes.

Proposition

Soient f une fonction analytique dans un domaine Ω pouvant être non simplement connexe et deux contours γ_1 et γ_2 de Ω homotopes dans Ω, alors on a, en prenant la même orientation pour les deux contours :

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Exemple

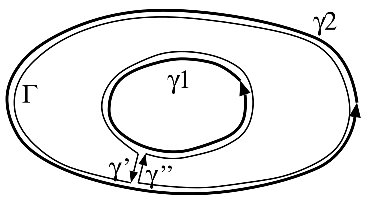
En reprenant la figure précédente :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0 \text{ et } \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Démonstration

On considère un contour $\Gamma = \gamma_1 + \gamma' + (-\gamma_2) + \gamma''$ homotope a un point. Les contributions de γ' et γ'' se compensant, on a :

$$\int_{\Gamma} f = 0 = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$



Proposition

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe Ω, alors f admet une primitive sur Ω.

1.4.2 Formule intégrale de Cauchy

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω simplement connexe, et $z \in \Omega$. Alors on a, pour tout contour γ de Ω orienté positivement et entourant z :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}\, dz'}$$

Démonstration

f est analytique donc continue sur Ω. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ |z'-z| \leqslant r \Rightarrow |f(z') - f(z)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons le cercle γ' de centre z et de rayon r.

$$\forall z' \in \gamma',\ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z'-z} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}$$

Le théorème de Darboux donne donc :

$$\left| \int_{\gamma'} \frac{f(z') - f(z)}{z'-z}\, dz' \right| \leqslant 2\pi\, r\, \frac{\varepsilon}{r}$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' &= \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z'-z}\, dz' \\ &= f(z) \int_{\gamma'} \frac{dz'}{z'-z} \\ &= f(z)\, 2i\pi \qquad \text{(cf 1.3.2)} \end{aligned}$$

1.4.3 Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω, alors f est de classe C^∞ sur Ω.
Si de plus Ω est simplement connexe, pour tout contour γ entourant z on a :

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}\, dz'}$$

1.4.4 Théorème du maximum

Définition :

Soit g une fonction de la variable complexe. On dit que $|g|$ admet un maximum local relatif en $z = z_0$ s'il existe un voisinage U de z_0 tel que :

$$\forall z \in U,\ |g(z)| \leqslant |g(z_0)|$$

Si l'inégalité est stricte, i.e. :

$$\forall z \in U/\{z_0\},\ |g(z)| < |g(z_0)|$$

alors le maximum local est dit strict.

Théorème

Soit f une fonction analytique sur un domaine Ω. Le module $|f|$ ne peut présenter de maximum local strict en un point $z_0 \in \Omega$.

Démonstration

Supposons qu'il y ait un maximum strict en z_0, alors on peut trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de z_0 tel que $\forall z \in \mathcal{V}$, $|f(z)| < |f(z_0)|$.
Considérons le chemin γ défini comme le cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$. On a :

$$\gamma : \gamma(t) = z_0 + r\, e^{2i\pi t},\ t \in [0,1]$$

D'après les théorèmes précédents, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

D'après le théorème de Darboux, on a une majoration :

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\gamma} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| 2\pi\, r = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$$

Donc il existe $z \in \gamma$ tel que $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ et z_0 n'est pas maximum strict.

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω. Si en un point $z_0 \in \Omega$, $|f|$ présente un maximum local relatif, alors f est constante sur Ω.

1.4.5 Théorème de Morera

Théorème (Morera)

Soit f une fonction continue dans un domaine Ω simplement connexe. Si pour tout contour $\gamma \in \mathbb{C}$ on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

alors f est analytique sur Ω.

1.4.6 Théorème de Liouville

Théorème (Liouville)

Soit f une fonction entière.
Si f est bornée (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}\ \ |f(z)| \leqslant M$), alors f est constante.

Démonstration

f est entière. Soit z_0 un point de $\mathbb{C}$ et soit γ le cercle de centre z_0 et de rayon R.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$
$$\left|f'(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2}\, 2\pi\, R = \frac{M}{R}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ on montre que $|f'| = 0$ donc que f est constante.

Remarques

- Attention à bien vérifier que le module de f est borné :
  ce n'est pas le cas de $z \longmapsto \sin z$ par exemple
- Le théorème de Liouville permet de démontrer facilement le théorème de D'Alembert-Gauss

1.5 Séries de fonctions d'une variable complexe

1.5.1 Généralités

Définition :

Soit une suite de fonctions $\big(g_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général $g_n(z)$ la suite :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} g_n(z)$$

Définition : Convergence simple

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ et que sa somme est $S(z)$ si et seulement si :

$$\forall z \in U,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(z,\varepsilon),\ n > N \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

Définition : Convergence uniforme

On dit que la série $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers S si et seulement si, les deux propositions étant équivalentes :

- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \Longrightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in U$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \Longrightarrow \sup\limits_{z\,\in\,U} |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$

ATTENTION ⚠

La convergence uniforme demande des hypothèses beaucoup plus fortes que la convergence simple, les z n'étant pas choisis au début de la définition. La convergence uniforme implique de manière évidente la convergence simple.

Propriétés des séries uniformément convergentes

1. *Si (S_n) converge uniformément dans $U \subset \mathbb{C}$ et si $\forall n \in I\!N$, g_n est continue en un point $z_0 \in U$ alors la somme de la série des g_n est continue en z_0.*
2. *Si (S_n) converge uniformément le long d'un chemin γ et si $\forall n \in I\!N$, g_n est continue, alors*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma g_n(z)\, dz \right)$$

3. *Si quel que soit $n \in I\!N$, $g_n(z)$ est analytique dans un domaine Ω et si (S_n) converge uniformément dans tout disque fermé contenu dans Ω, alors la somme S est analytique dans Ω et :*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(z)$$

Proposition (Critère de Weierstrass)

Si $\forall n \in I\!N$, on a :

$$|g_n(z)| \leqslant a_n \qquad \forall z \in U$$

avec a_n terme général d'une série numérique convergente, alors la série $\sum g_n$ converge uniformément sur U.

Définition : Convergence absolue

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si et seulement si la série $\sum |g_n|$ converge.

1.5.2 Séries entières

Définition :

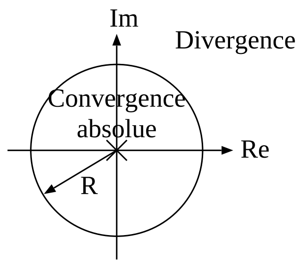
On appelle série entière de centre z_0 et de coefficient a_n la série de terme général $g_n(z) = a_n(z - z_0)^n$.

Proposition

$\exists R > 0$ tel que :

1. *la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge absolument dans le disque de convergence $\mathrm{D}(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z-z_0| < R\}$*
2. *la série entière diverge en tout point z tel que $|z - z_0| > R$*

R est appelé rayon de convergence de la série.



Si $\sum g_n(z)$ ne converge que pour $z = z_0$, alors $R = 0$.
Si $\sum g_n(z)$ converge dans tout le plan complexe, alors $R = +\infty$.

Exemple

Etudier la série entière de terme général $g_n(z) = z^n$.
On étudie la série réelle à termes positifs $\sum |z^n|$ en utilisant le critère de d'Alembert. Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, on a :

$$\frac{|g_{n+1}(z)|}{|g_n(z)|} = |z|$$

donc :

$$\begin{cases} \sum |g_n(z)| & \text{converge si } |z| < 1 \\ \sum |g_n(z)| & \text{diverge si } |z| > 1 \end{cases}$$

De manière évidente, si $|z| = 1$ la série $\sum |z^n|$ diverge.
La série entière $\sum z^n$ converge donc absolument sur le disque ouvert unité.

Proposition

Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R. Dans tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r)$ avec $r < R$, la série entière converge uniformément.

Théorème (Dérivation)

Soit la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R. On a :

1. *Le rayon de convergence de la série $\sum n\, a_n(z - z_0)^{n-1}$ est égal à R.*
2. *La somme $S(z)$ de la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ est analytique dans $\mathrm{D}(z_0,R)$ et sa dérivée $S'(z)$ en $z \in \mathrm{D}(z_0,R)$ est :*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n(z - z_0)^{n-1}$$

3. *Par itération de la proposition précédente, on a :*

$$S^{(k)}(z_0) = k!\, a_k,\ k \geqslant 0$$

d'où :

$$\forall z \in \mathrm{D}(z_0,R),\ S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

1.6 Séries de Taylor

1.6.1 Série de Taylor d'une fonction analytique

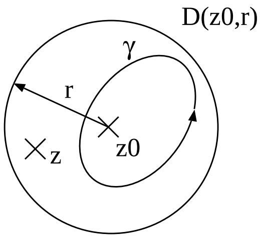
Définition :

Soit f analytique sur le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0,r)$, avec $r > 0$.
$\forall z \in \mathrm{D}(z_0,r)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec
$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}\, dz'$$

et avec γ un contour dans $\mathrm{D}(z_0,r)$ orienté positivement entourant z_0.
Ce développement (qui est unique) est appelé développement de Taylor de f autour de z_0.



NB : γ n'a pas besoin d'entourer z.

Remarque

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Démonstration

Soit $\gamma_e(t) = z_0 + \hat{r}\, e^{2i\pi t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, avec $|z - z_0| < \hat{r} < r$.
D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega$$

Or
$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}}$$

et $\omega \in \gamma_e$ donc $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ donc en développant le deuxième terme de l'expression en série entière, on a :

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

et
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\omega)(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}\, d\omega$$

Montrons alors que la série de fonctions à l'intérieur de l'intégrale est uniformément convergente sur γ_e. Par majoration du terme général de la série, on a :

$$\left| \frac{f(\omega)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{\sup_{\gamma_e} |f(\omega)|}{\hat{r}} \left| \frac{z - z_0}{\hat{r}} \right|^n$$

Or $\left|\frac{z-z_0}{\hat{r}}\right|^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, sa raison étant inférieure a 1.
Donc par Weierstrass on a convergence uniforme de la série et on peut inverser les signes somme et intégrale, ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\, d\omega$$

Or f est analytique donc l'intégration est indépendante du chemin entourant z_0. Par unicité du développement en série entière de f, en identifiant les coefficients, on a le résultat voulu.

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

f a une singularité en $z = 0$.
On cherche le développement de Taylor de f en 1.
On considère le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0 = 1, r = 1)$. f est bien analytique sur ce disque. $\forall z \in \mathrm{D}(1,1)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Pour calculer c_n :
<u>Méthode 1 :</u>

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\ f^{(n)} &= \frac{(-1)^n\,(n+1)!}{z^{n+2}} \\ c_n &= (-1)^n\,(n+1) \end{aligned}$$

<u>Méthode 2 :</u>

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(1+Z)^2} \qquad \text{avec} : z = 1 + Z \\ &= 1 + \frac{-2}{1!}\,Z + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}\,Z^2 + \ldots \quad (|Z| < 1) \\ &= 1 - 2\,(z-1) + 3\,(z-1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Remarque

C'est la présence d'une singularité à l'origine pour $f(z) = \frac{1}{z^2}$ qui limite le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n\,(n+1)\,(z-1)^n$ à 1.

Proposition

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine Ω, et soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout z' appartenant au plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω, la série de Taylor $S(z') = \sum c_n (z' - z_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(z')$.

Proposition

Si f est entière, alors la série de Taylor de f de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(z)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

1.6.2 Zéro d'une fonction analytique

Définition :

Soit f une fonction analytique dans un domaine Ω et non identiquement nulle sur Ω.
S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$, alors z_0 est un zéro de f. De plus, on dit que z_0 est un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si : $\forall i \leqslant m-1,\ f^{(i)}(z_0) = 0$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Remarque

Si z_0 est un zéro d'ordre m, alors on peut mettre f sous la forme $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, avec :

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}$$

La fonction h ainsi définie est analytique dans Ω et dérivable donc continue en z_0 et ne s'annule pas sur un voisinage de z_0.

Définition : Points isolés

Soit z et z' deux éléments de $\mathbb{C}$. On dit que ces deux points sont isolés si il existe V et V' respectivement voisinages de z et z', tels que $V \cap V' = \varnothing$.

Théorème (théorème des zéros isolés)

Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.

Conséquence : prolongement analytique

Soit f_1 et f_2 deux fonctions analytiques sur Ω et soit U un ouvert non vide de Ω.
Si $\forall z \in U,\ f_1(z) = f_2(z)$ alors $f_1 = f_2$ pout tout $z \in \Omega$.
Cas particulier : si une fonction f analytique est nulle sur U alors elle est nulle sur Ω.

Remarque

Cette proposition reste vraie si U est un arc de courbe non réduit a un point.

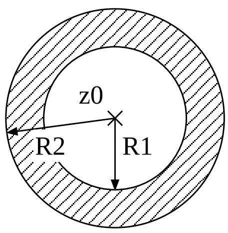
1.7 Séries de Laurent et résidus

1.7.1 Série de Laurent

Définition :

On définit la couronne ouverte de centre z_0, de rayon R_1 et R_2 par :

$$\mathrm{C}(z_0,R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C}\ /\ 0 \leqslant R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$



Remarque

Si $R_1 = 0$, on note $\mathrm{C}(z_0,0,R_2) = \dot{\mathrm{D}}(z_0,R_2)$, qu'on appelle disque pointé.

Proposition

Soit f analytique sur $\mathrm{C}(z_0,R_1,R_2)$, alors :

$$\forall z \in \mathrm{C}(z_0,R_1,R_2),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

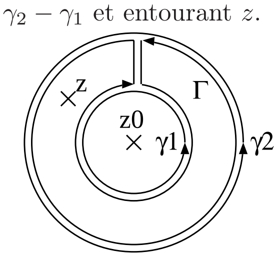
avec :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz' \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z')\,dz' \end{aligned}$$

et γ un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant z_0.
Ce développement est appelé <u>développement en série de Laurent</u> et il est unique.

Démonstration

γ est homotope à un contour Γ proche de $\gamma_2 - \gamma_1$ et entourant z.



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right] \end{aligned}$$

On fait le dévelopement de Taylor de f sur γ_2, ce qui donne les c_n pour $n \geqslant 0$.
Pour γ_1 on a $|w-z_0| < |z-z_0|$. Il faut donc refaire le même raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= -\frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les c_n pour $n \leqslant 0$.

Remarque

Si f est analytique sur $\mathrm{D}(z_0,R_2)$ alors les coefficients c_n sont nuls pour $n \leqslant 0$.

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}_+^*$$

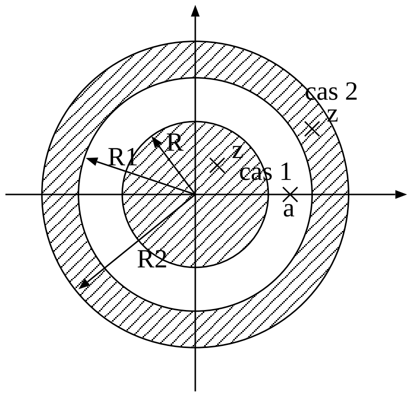
f possède une singularité en a. On cherche le développement en série de Laurent de f autour de $z_0 = 0$.
<u>Cas 1 :</u> $|z| < a$, f est analytique sur $\mathrm{D}(0,R)$ avec $|z| < R < a$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}} \\ &= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \ldots \end{aligned}$$

Cas 2 : $|z| > a$

f est analytique sur $C(0,R_1,R_2)$, avec $a < R_1 < |z| < R_2$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \ldots \end{aligned}$$



1.7.2 Points singuliers

Définition :

- Soit z_0 un point au voisinage duquel f n'est pas analytique. On dit que z_0 est un point singulier de f.
- Soit z_0 un point singulier de f. S'il existe un disque ouvert pointé (i.e. privé de z_0) de centre z_0 et de rayon $r > 0$ dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.

Exemples

1. $f : z \longmapsto \dfrac{1}{z-2}$, le point $z_0 = 2$ est un point singulier isolé.
2. $f : z \longmapsto \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, le point $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé.

N.B. : Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés.

Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend f admettant un point singulier z_0, et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de z_0, on a, en notant $b_n = c_{-n}$ et $a_n = c_n$:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{partie singulière}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Définition :

(1) Si tous les b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $D(z_0,r)$ et on dit que z_0 est une <u>singularité apparente</u>.
(2) Si les b_n sont non tous nuls, i.e. s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$ pour tout $n > m$, alors z_0 est un <u>pôle d'ordre m</u> et : $\forall z \in \dot{D}(z_0,r)$, $f(z) = \dfrac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dfrac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots$. Si $m = 1$, on dit qu'on a un pôle simple.
(3) S'il existe une infinité de b_n non nuls, la singularité est dite **essentielle**

Exemples

1. $z \longmapsto \frac{\sin z}{z}$: $z_0 = 0$ est une singularité.
   Les b_n sont tous nuls et on a :
$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$
   $z \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ est analytique et z_0 est une singularité apparente.
2. $z \longmapsto \frac{1}{z-2}$: $z_0 = 2$ est une singularité.
   C'est un pôle d'ordre 1.
3. $z \longmapsto e^{1/z}$: $z_0 = 0$ est une singularité.
$$\begin{aligned} e^{1/z} &= 1 + \frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} + ... \\ a_0 &= 1 \\ a_n &= 0 \qquad \forall n > 0 \\ b_n &= \frac{1}{n!} \qquad \forall n > 0 \end{aligned}$$
   z_0 est un singularité essentielle.

Définition : Méromorphe

Une fonction ne possédant pas d'autres singularités que des pôles dans un domaine Ω est dite méromorphe dans Ω.

1.7.3 Résidu en un point singulier isolé

Définition :

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Soit $\dot{\mathrm{D}}(z_0,r)$ un disque pointé ne contenant pas de point singulier de f.
$$\forall z \in \dot{\mathrm{D}}(z_0,r) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
Le coefficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et est noté $\mathrm{Res}\,(f,z_0)$.

On a donc : $\boxed{\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz}$ où γ est un contour orienté positivement inclus dans $\dot{\mathrm{D}}(z_0,r)$ et entourant z_0.

Remarque

Si z_0 est une singularité apparente de f alors $\mathrm{Res}\,(f,z_0) = 0$.

Calcul pratique de résidus

1. Si z_0 est un pôle simple
$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + g(z)$$
   où $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + ...$ est une fonction analytique au voisinage de z_0 et nulle en z_0. On a donc :
$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = b_1$$
   d'où :
$$\boxed{\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

2. Si z_0 est un pôle d'ordre m

$$\boxed{\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés.

Proposition

Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.
On a :

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0) = g(z_0)$$

Proposition

Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec g et h deux fonctions analytiques au voisinage de z_0 et telles que $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h.
On a alors :

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Démonstration

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,\frac{g(z)}{h(z)} = g(z_0)\,\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

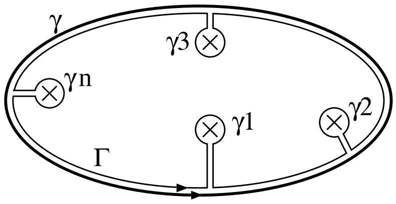
1.7.4 Théorème des résidus

Théorème des résidus

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $(z_1,\ldots,z_n)$ un nombre fini de points de Ω isolés et distincts. Soit de plus f analytique dans $\Omega\backslash\{z_1,\ldots,z_n\}$. Si on prend γ un contour contenu dans Ω et entourant les $z_i, i \in [1,n]$, sans rencontrer ces points, et orienté positivement, alors :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f,z_k)}$$

Démonstration



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 = \int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

or

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = -2i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,z_k)$$

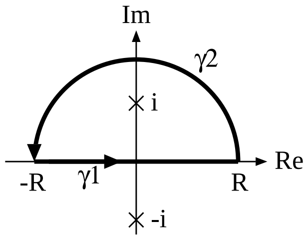
d'où le résultat.

1.7.5 Application des résidus au calcul d'intégrales

Exemple

Calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Considérons pour cela $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{+i, -i\}$.
i et $-i$ sont des pôles simples.



$\gamma(R) = \gamma_1(R) + \gamma_2(R)$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_1(R) & : & t & \longmapsto & (2t-1)\,R \\ \gamma_2(R) & : & t & \longmapsto & R\,e^{i\pi t} \end{cases} \quad t \in [0,1], R > 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(R)} f(z)\,dz &= 2i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,i) = 2i\pi\,\frac{1}{2i} = \pi \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_2(R)} f(z)\,dz \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \forall z \in \gamma_2(R) \qquad |1+z^2| &\geqslant R^2 - 1 \\ \left|\frac{1}{1+z^2}\right| &\leqslant \frac{1}{R^2-1} \\ \left|\int_{\gamma_2(R)} f(z)\,dz\right| &\leqslant \frac{\pi R}{R^2-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ (ce résultat est immédiat avec les lemmes de Jordan), puis que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} = I = \pi$.

Remarque

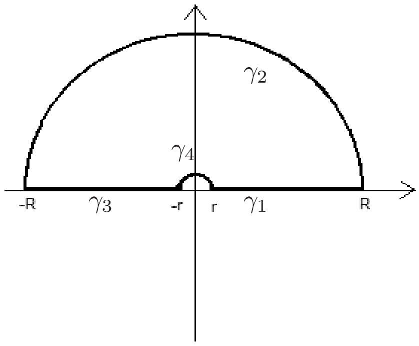
Pour certains calculs d'intégrales, il faut utiliser les valeurs principales de Cauchy qui sont décrites dans le chapitre 5.

Calcul de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Soit $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Riemann généralisée semi- convergente.

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

On passe alors en complexe : on étudie $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}$ (sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$)
Rés $(f,0) = 1$.



On définit le contour $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, tels que :
- γ_1 : axe réel de $+r$ à $+R$.
- γ_2 : demi-cercle de centre 0, de rayon R (demi-plan supérieur).
- γ_3 : axe réel de $-R$ à $-r$.
- γ_4 : demi-cercle de centre 0, de rayon r (demi-plan supérieur).

Ainsi,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

$$\int_r^R \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz = 0 \qquad \text{Second Lemme de Jordan.}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz &= \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} \\
&= \lim_{r\to 0} \int_0^r \frac{1}{(-re^{-\mathrm{i}\pi t})} - re^{-\mathrm{i}\pi t}(-\mathrm{i}\pi)dt. \\
&= -\mathrm{i}\pi \qquad 3^{\text{ème}} \text{ de Jordan}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx \right) = \mathrm{i}\pi}$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi} \qquad \boxed{\mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = 0}$$

1.8 Lemmes de Jordan

Lemme 1

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$$

(θ désignant l'argument de z) , sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 \quad (\textit{resp.} \lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0), \quad \textit{pour } \theta_1 \leqslant arg(z) \leqslant \theta_2$$

alors l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz \ (\textit{où } \gamma \textit{ est un arc de cercle de rayon } R \textit{ contenu dans le secteur } \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$$

tend vers zéro quand R tend vers l'infini (resp. vers 0).

Lemme 2

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$$

*du **demi-plan supérieur** (resp. du demi-plan inférieur), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si*

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \quad pour\ \theta_1 \leqslant arg(z) \leqslant \theta_2$$

alors, pour $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0}$ (resp. $k < 0$), l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\, e^{ikz} dz$$

étendue à un arc de cercle γ de rayon R contenu dans le secteur $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, tend vers zéro quand R tend vers l'infini. Ce lemme est très souvent utilisé lors du calcul de transformées de Fourier par la méthode des résidus .

Lemme 3

Si f est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r\to 0} \int_\gamma f(z)\, dz = i\pi\, \mathrm{Res}\,(f,0)$$

où r est positif et $\gamma : t \longmapsto r\, e^{i\pi t}$, $t \in [0,1]$.

1.9 Fonctions multiformes : la fonction Ln

Rappels

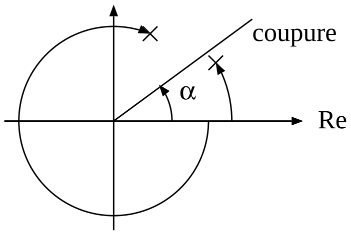
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathbb{R}$.
On a : $X = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^X$.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On cherche $Z = X + i\,Y$ tel que $z = e^Z$.

$$z = |z|\, e^{i\theta} = e^X\, e^{i\,Y} \Longrightarrow \begin{cases} X &= \ln|z| \\ Y &= \theta + 2\,k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Z = \ln|z| + i\,(\arg(z) + 2\,k\pi)$$

Il existe donc une infinité de Z tel que $z = e^Z$, d'où le nom de fonction multiforme (ou à détermination multiple).
On peut alors définir une coupure dans le plan complexe (demi-droite partant de l'origine), et un ensemble $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$ ($\mathbb{C}$ privé de la coupure) dans lequel il n'y a plus de contour entourant l'origine :
on choisit $\alpha \in [0,2\pi[$ et par convention on impose $\arg(z) \in]-2\pi + \alpha, \alpha[$.
Les arguments sont ainsi déterminés de façon unique.



(En pratique on prend souvent $\alpha \neq 0$ pour ne pas se priver de l'axe réel)
On a alors, $\boxed{Z = \ln|z| + i\ \arg(z) = \mathrm{Ln}(z)}$, $\quad \forall z \in \mathbb{C}_{\text{coupé}}$
Le résultat de la fonction Ln dépend du choix de la coupure.
Dans $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$, Ln est analytique et $\dfrac{d}{dz}\,\mathrm{Ln}(z) = \dfrac{1}{z}$.

Cas particulier

On appelle détermination principale du logarithme la fonction Ln avec pour coupure $\alpha = \pi$.
On a alors $\arg(z) \in]-\pi,\pi[$ et $\mathbb{C}_{\text{coupé}} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$.