

# La Turbulence selon Langevin-Lagrange

GIT/SPEC/DRECAM/DSM, URA2464 CNRS, CEA Saclay, l'Orme des Merisiers 91191 Gif sur Yvette Cedex

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR8107 CNRS, Blv Paul Langevin 59655 Villeneuve d'Ascq

*La turbulence, égrerie des météorologues et cauchemar des ingénieurs... Rarement un problème de physique classique aura suscité autant de travaux, d'interrogations majeures et mobilisé autant de grands physiciens et mathématiciens... en vain ! On recherche encore le modèle miracle qui permettrait de la simuler sur nos ordinateurs, afin de comprendre et prédire les écoulements qui nous entourent. La solution résiderait-elle dans une approche issue d'idées vieilles de plus de cent ans ?*

On raconte qu'Einstein, à son entrée au paradis, n'aurait eu que deux questions à poser à Dieu, classées par ordre croissant d'importance : i) comment quantifier la gravité ? ii) Quelle est la solution à la turbulence ? Plus récemment, la fondation Clay a annoncé qu'elle offrirait un million de dollars à celui ou celle qui réussirait à démontrer que la turbulence est un problème bien posé. Quelle est donc cette entité étrange, dont la tête est mise à prix, et qui obsède nos plus grands savants jusque sur leur lit de mort ? D'un point de vue sémantique, on comprend bien que la turbulence est un phénomène associé à une agitation, un mélange, un mouvement désordonné, voire une contrariété : un enfant turbulent, les turbulences aériennes, ou celles des marchés financiers en constituent autant d'exemple. La turbulence dont nous allons vous parler concerne un état particulier des écoulements, obtenu quand certaines conditions sont réalisées, comme par exemple dans un tor-

rent de montagne, ou dans une atmosphère planétaire. Au vu de ces systèmes et de la complexité associée, on pourrait penser que la difficulté du problème de la turbulence est liée à une difficulté de formulation de ses équations fondamentales. Paradoxalement, le problème est ailleurs : on connaît les équations qui gouvernent le mouvement des fluides depuis les travaux de Navier (1823) et Stokes (en 1843). Ce sont des équations de la physique "classique" ne faisant intervenir ni phénomènes quantique, ni mécanique relativiste. La difficulté réside dans le grand nombre de degrés de libertés impliqués dans la solution de ces équations dans le régime turbulent. Empiriquement, ces degrés de liberté sont un moyen de dénombrer les structures de toutes tailles qui sont observables dans un écoulement turbulent. Ces structures couvrent une gamme d'échelle allant de l'échelle dite "de forçage", où le fluide est mis en mouvement, à l'échelle dite "de dissipation", où les mécanismes de dis-

sipation moléculaires transforment l'énergie injectée en chaleur. Entre les deux, des processus complexes d'étirement et de repliement créent un continuum d'échelles par lesquelles l'énergie peut être transférée en une sorte de cascade qui rebondirait d'échelle en échelle depuis son sommet (l'échelle de forçage) jusqu'à sa base (l'échelle de dissipation). Un calcul théorique montre qu'en dimension trois, le nombre de degrés de liberté impliqués dans une telle cascade se comporte comme la puissance neuf quarts du rapport de l'échelle de forçage sur l'échelle de dissipation. Dans l'atmosphère, par exemple, le rapport de ces échelles est de l'ordre de  $10^7$ , ce qui implique un nombre de degré de liberté de l'ordre de  $10^{16}$ . En pratique, cela signifie que pour résoudre numériquement les équations de la dynamique de l'atmosphère, on aurait besoin d'un ordinateur ayant une mémoire d'au moins 100 millions de gigaoctets. Un tel ordinateur n'est pas encore disponible. Même s'il le devenait un jour, il

n'est pas encore clair qu'il serait assez rapide pour simuler les équations de la météo plus vite que le "déroulement du temps"! Le "problème" pratique de la turbulence pourrait donc se résumer ainsi : est-il possible de mettre au point une approche permettant d'obtenir une solution des équations de Navier-Stokes, sans calculer explicitement tous ses degrés de liberté? Ainsi posé, le défi ressemble beaucoup à celui rencontré à la fin du XIXième siècle par les fondateurs de la mécanique statistique. On pourrait alors espérer qu'une simple adaptation des méthodes de ce domaine suffirait à démêler l'écheveau de la turbulence. Hélas, le sort s'acharne sur les pauvres mathématiciens, physiciens et ingénieurs. Les méthodes de la mécanique statistique ont été développées principalement pour des systèmes ayant atteint un certain équilibre thermodynamique. Dans un fluide non forcé, les phénomènes de dissipation impliquent que le seul état à l'équilibre thermodynamique soit celui de vitesse nulle. Pour obtenir un écoulement à vitesse non nulle, il faut contrebalancer ces effets dissipatifs par un flux d'énergie entrant dans le système. On peut alors obtenir un système stationnaire, mais qui sera en permanence en état d'hors équilibre, et dans lequel les recettes traditionnelles de la mécanique statistique ne s'appliqueront plus! Cette discussion illustre le défi majeur posé à l'heure actuelle par la turbulence. Comme toujours dans de tels cas, il est peu probable que l'on puisse

trouver une méthode universelle *ab initio* pour résoudre tous les problèmes que ce défi implique. Nous référerons le lecteur curieux à l'article de Castaing et al (2000) et aux ouvrages de Lesieur et Frisch pour avoir une vision de la diversité des méthodes employées dans ce cadre. Nous nous concentrerons ici sur la discussion d'une approche du problème qui a conduit à une compréhension récente de certaines propriétés des écoulements turbulents, et qui ouvre des perspectives de recherche intéressantes.

### L'APPROCHE LANGEVIN

Cette approche, que j'appellerai approche de Langevin, met en œuvre deux notions distinctes et subtiles sur lesquelles il est intéressant de s'appesantir : la description lagrangienne, et la notion de bruit. Pour la première, il est nécessaire de savoir que la mécanique des fluides est traditionnellement confrontée à deux points de vue différents : le point de vue lagrangien, et le point de vue eulérien. Par le premier, on se ligote par la pensée à une particule fluide et on observe la dynamique en suivant son mouvement. Par le second, on s'assied à un endroit fixe, et on regarde défile l'écoulement en ce point. Ce dernier point de vue est celui d'un pêcheur le long d'une rivière et semble plus approprié pour avoir une intuition des résultats, voire pour faire des mesures expérimentales. Il implique cependant une description des équations en terme d'équations aux dé-

rivées partielles. En ce sens, l'approche lagrangienne, plus proche de la mécanique du point classique, est plus simple à mettre en œuvre théoriquement ou numériquement puisqu'elle n'implique que des équations aux dérivées ordinaires. Par contre, toute mesure lagrangienne expérimentale implique des techniques très sophistiquées, à base par exemple de mesures acoustiques (voir Image de la physique 2000). Concrètement, on se donne donc une position initiale, et on étudie la dynamique d'une quantité le long de la ligne de fluide, définie paramétriquement par l'équation implicite  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$ . Un exemple d'une telle ligne est donné en Figure 1. La dynamique est ensuite définie par une équation additionnelle, écrite dans le repère en mouvement suivant la ligne de fluide. Par exemple, pour définir le comportement d'une quantité scalaire conservée  $\theta$ , on posera  $\dot{\theta} = 0$  le long de cette ligne de fluide. Cette équation décrit par exemple la dynamique de la concentration d'un colorant, ou d'un polluant, dans la limite où l'on néglige la diffusion moléculaire, fruit de l'agitation brownienne et responsable de l'étalement d'une tache de colorant au cours de son déplacement. L'advection d'un vecteur "passif"  $\vec{B}$  (qui ne rétroagit pas sur la dynamique du fluide), comme le gradient d'une quantité scalaire, implique, elle, un étirement local le long des lignes de fluide selon  $\dot{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \nabla_a \vec{u}$  où l'indice  $a$  indique une différentiation par rapport à la coordonnée lagrangienne  $\vec{a}$ .

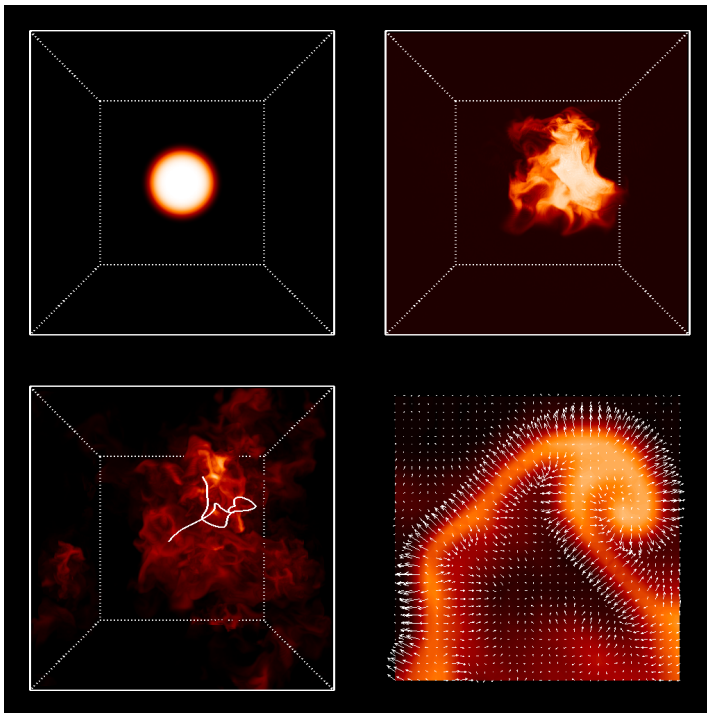


Figure 1 - La turbulence en images. En haut, de gauche à droite : évolution d'une tache de colorant (scalaire passif) dans un milieu turbulent. En bas : à gauche. Ligne blanche : trajectoire d'une particule lagrangienne lâchée dans ce même écoulement turbulent. Cette trajectoire définit une ligne de fluide, le long de laquelle on pourra étudier la dynamique Lagrangienne du colorant. A droite : instantané du gradient de la tache de colorant (vecteur passif) dans une zone correspondant au centre de l'image en haut à droite. Initialement, tous ces vecteurs étaient de même norme, et centrifuges.

On voit dans ces exemples que tout est déterminé par la connaissance de la vitesse du fluide  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ . En principe, cette dernière est gouvernée par le principe fondamental de la dynamique  $\rho \dot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{x}, t)$  où  $\rho$  est la densité du fluide et  $\vec{f}$  regroupe l'ensemble des forces s'appliquant à une particule fluide. Elle inclut par exemple les forces de pression, ou la force de Laplace si le fluide est conducteur. Malgré leur aspect anodin, ces équations recèlent une formidable complexité, liée à leur non-linéarité intrinsèque et aux effets associés : non-unicité des solutions, chaos, sensibilité aux conditions initiales... Il suffit pour s'en convaincre de regarder en Figure 1 le fruit de l'intégration de ces équations en partant d'une solution initiale très simple : une tache uniforme de colorant, au centre de la boîte d'intégration.

Cet exemple illustre également un des effets dont nous discutons en introduction : la formation de structures très fines, dont la taille n'est limitée que par l'action de la diffusivité moléculaire. Dans un écoulement très turbulent, cela conduit à des structures tellement fines qu'elles sont impossible à re-

produire par les processus de discrétisation utilisés dans les codes numériques actuels. Au niveau du fluide, cela conduit à des mouvements à petite échelle tellement rapides qu'ils peuvent être considérés, d'un point de vue macroscopique, comme une sorte de bruit, avec un court temps de corrélation. D'où l'idée d'abandonner la description exacte de ces petites échelles (idée sous-tendant la plupart des modèles de turbulence), et de les remplacer par un bruit imposé a priori. En pratique, cela revient à décomposer les forces s'appliquant à la particule fluide en une partie déterministe, liée à la dynamique des grandes échelles, et une partie stochastique, décrivant la résultante, à grande échelle, de la dynamique des petites échelles. On obtient alors pour la vitesse une équation du type  $\dot{\vec{u}} = A\vec{u} + \vec{\xi}(\vec{x}, t)$ , où  $A$  est un opérateur déterministe (éventuellement non linéaire en  $\vec{u}$ ) et  $\vec{\xi}$  est un bruit. Cette démarche n'est pas sans rappeler la démarche originale de Langevin, qui introduisit un bruit pour décrire, au niveau macroscopique, l'agitation brownienne résultant des forces microscopiques s'appliquant à une particule dans un

fluide. D'où le nom que nous lui avons choisi. A ce point, un lecteur averti et pessimiste pourrait penser que cette simplification brutale a peu de chance d'aboutir à un résultat physiquement fiable si le bruit ne possède pas les caractéristiques inhérentes aux vraies petites échelles de la turbulence. La simplification annoncée ne cacherait donc qu'un formidable travail de modélisation ? Peut-on vraiment recréer la turbulence avec des prescriptions de bruit relativement simples ?

#### LA LOI DE RICHARDSON ET LE SPECTRE DE KOLMOGOROV

Considérons par exemple le cas le plus simple : celui où l'on prend  $A = 0$  et on ne garde que la contribution du bruit. Le bruit le plus simple que l'on puisse imaginer est un bruit Gaussien, spectralement uniforme, à temps de corrélation infiniment court. Ce cas d'école fut proposé en 1959 par Obukhov. Il conduit à une solution avec des propriétés assez remarquables. Considérons par exemple un nuage de petites particules fictives placées initialement au voisinage d'un même point de l'écoulement. Au bout d'un temps  $t$ , cet

ensemble de particules sera tel que la distribution de ses vitesses suit une loi Gaussienne, avec une variance proportionnelle à la racine du temps  $\sqrt{\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle} \sim t^{1/2}$ . Parallèlement, la variance de la distribution des positions varie un peu plus rapidement, comme  $r = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \sim t^{3/2}$ . Physiquement, cette quantité décrit l'étalement du nuage de particules au cours du temps. Elle représente également la dispersion d'un polluant dans un écoulement turbulent, qui, selon ce modèle, varie donc comme la puissance 3/2 du temps. On retrouve ainsi une loi empirique établie par Richardson en 1926 en étudiant la pollution atmosphérique. En combinant les deux relations, on trouve de plus que la variance de la vitesse varie comme la puissance 1/3 de la variance de la distribution des positions. Cette loi d'échelle conduit à l'existence d'un spectre d'énergie spatiale variant comme la puissance  $-5/3$  du nombre d'onde  $k$  :  $E(k) \sim k^{-5/3}$  (Figure 2). C'est le

célèbre spectre de Kolmogorov, observé dans tous les écoulements turbulents suffisamment homogènes et isotropes.

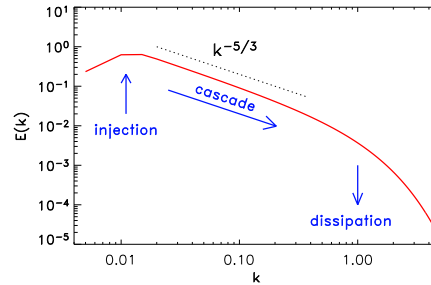


Figure 2 - Spectre de Kolmogorov : l'énergie  $E(k)$  du mode de Fourier  $k$  est tracé en fonction de ce mode. On trouve une loi en puissance, de pente  $-5/3$ .

On voit sur cet exemple qu'avec une prescription très simple, on arrive à reproduire sans effort deux des résultats expérimentaux parmi les plus robustes de la turbulence ! Avons-nous découvert le Graal du premier coup ? Tout dépend du degré de précision que vous en attendez. Les deux loi décrites ici sont représentatives de vitesses impliquant des événements relativement

proches des conditions moyennes. Pour faire une analogie parlante, disons que l'équivalent "météo" d'un tel modèle serait capable de prédire les coups de vent typiques, i.e. les écarts par rapport à un vent moyen. Mais qu'en est-il des vitesses correspondant à des événements beaucoup plus écartés de la moyenne, plus "violents" mais plus rares ? (L'équivalent de tornades, ou de tempêtes très violentes dans l'analogie). La signature de ces événements se retrouve dans des moments plus élevés de la distributions, en fait d'autant plus élevés que l'événement est rare. Dans le modèle d'Obukhov, les vitesses sont gaussiennes, et donc les moments d'ordre  $2n$  se déduisent simplement du moment d'ordre  $n$  selon  $\langle u^{2n} \rangle \sim \langle u^2 \rangle^n$ . Cette loi hiérarchique n'est pas observée dans les écoulements turbulents (voir encadré numéro un), à cause du phénomène d'intermittence, lié à l'existence de bouffées violentes d'activité.

## Encadre

# LOIS D'ÉCHELLE, DISSONANCE ET INTERMITTENCE EN TURBULENCE

Un écoulement turbulent est généralement caractérisé par une vaste gamme d'échelle, allant de l'échelle d'injection de l'énergie à l'échelle de dissipation. De ce point de vue, il paraît naturel de supposer que dans un intervalle d'échelles ni trop grandes, ni trop petites (appelé domaine inertiel), les propriétés de la turbulence deviennent invariantes de l'échelle considérée. Comme dans tout système invariant d'échelle, on s'attendrait donc à voir apparaître des lois d'échelles. C'est Kolmogorov qui en 1941 a démontré mathématiquement l'existence d'une loi d'échelle exacte, impliquant les incréments de vitesse  $\delta v_r = v(x + r) - v(x)$ . Cette loi, dite des 4/5, relie le moment d'ordre trois de la distribution des incréments au taux moyen de dissipation d'énergie  $\epsilon = d \langle v^2 \rangle / dt$  via  $\langle (\delta v_r)^3 \rangle = -(4/5)\epsilon r$ . On peut par ailleurs montrer que l'existence de cette loi d'échelle conduit au spectre d'énergie de Kolmogorov  $E(k) \sim k^{-5/3}$ . Dans l'enthousiasme qui suivit cette découverte, certains ne se privèrent pas pour généraliser empiriquement cette loi en une règle du type  $\langle (\delta v_r)^n \rangle \sim r^{\zeta(n)}$ , avec  $\zeta_n = n/3$ . Hélas, les premières mesures expérimentales précises des exposants  $\zeta(n)$  modérèrent très vite cet enthousiasme en prouvant que la fonction  $\zeta(n)$  n'était pas du tout linéaire. Une observation plus attentive des signaux de vitesse prouva alors que ce phénomène était dû à la présence d'événements rares mais intenses, se manifestant par bouffées corrélées. On appela donc ce phénomène l'intermittence. Cette intermittence se manifeste également sur les distributions de probabilité (PDF) des incréments de vitesse par la présence d'ailes de plus en plus grasses à mesure que  $r$  tend vers l'échelle de dissipation (voir Figure 1).

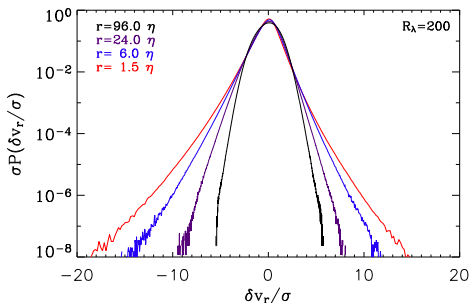


Figure 1 - PDF des incréments de vitesse en fonction de la séparation  $r$ , allant de la plus petite échelle de l'écoulement  $\eta$

(échelle de dissipation), à la plus grande échelle de cet écoulement, l'échelle de forçage (qui vaut numériquement ici  $96\eta$ ).

Physiquement, on peut montrer que cette intermittence est liée au caractère dissonant des interactions entre les différentes échelles d'un fluide turbulent. A cause de la non-linéarité quadratique des équations de Navier-Stokes, ces interactions se font en "triade", une composante de Fourier de la vitesse de nombre d'onde  $\vec{k}_1$  interagissant avec une composante de Fourier de nombre d'onde  $\vec{k}_2$  pour donner une contribution à la composante de Fourier  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ . On peut alors séparer grossièrement les interactions en deux familles : celles pour lesquelles  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  et  $\vec{k}_3$  sont à peu près de même norme. On parlera alors d'interactions "accordées". Les autres interactions, où l'un des nombres d'onde peut être très petit devant les deux autres, seront appelées interactions "dissonantes". Nous avons fait des simulations numériques en comparant les PDF des incréments dans des situations où l'on ne garde que les interactions accordées, et une autre où au contraire on ne garde que les interactions dissonantes pour calculer la dynamique de la vitesse. On observe en Figure 2 que le caractère gaussien des PDF est inversement proportionnelle au degré de dissonance des interactions.

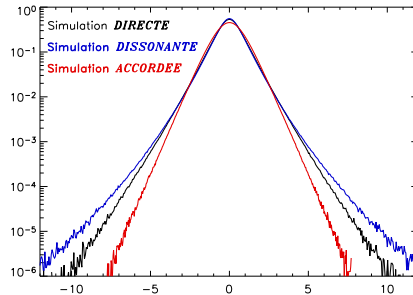


Figure 2 - Influence de la dissonance des interactions sur l'intermittence à une échelle donnée. On voit que plus les interactions sont dissonantes, plus l'intermittence est grande.

## LES MÉCANISMES DE L'INTERMITTENCE

Les raisons de l'incapacité du modèle d'Obukhov à reproduire

l'intermittence s'expliquent en remarquant que les forces qui s'appliquent à la particule fluide (pres-

sion, viscosité) sont fortement non-linéaires et non-locales, à la fois spa-

tialement et temporellement. Une force spatialement homogène, avec un temps de corrélation infiniment court comme dans le modèle d'Obukhov, ne permet pas de décrire ces effets, qui contrôlent l'intermittence via des processus de dissonance dans l'espace de Fourier. (voir encadré numéro un). Une compréhension analytique des mécanismes sous-jacents a été récemment obtenue dans le cadre du modèle de Kraichnan, où l'on approxime la vitesse par un bruit Gaussien, avec des corrélations temporelles infiniment courtes, mais avec des corrélations spatiales en loi de puissance (à longue portée) :  $\langle u(x, t)u(x', t') \rangle \sim \delta(t - t')|x - x'|^\zeta$ ,  $0 \leq \zeta \leq 2$ , dans la gamme d'échelle où  $r = |x - x'|$  est borné par les échelles de dissipation et de forçage. Ces mécanismes sont décrits en détail dans la revue de Falkovich et al, 2001. Nous n'en offrirons ici qu'un condensé succinct. On peut tout d'abord remarquer que le modèle de Kraichnan peut être vu comme la limite sur-amortie d'un processus de Langevin  $\dot{\vec{u}} = -\gamma\vec{u} + \xi(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{u} \ll \gamma\vec{u}$ , où  $\xi$  est un bruit Gaussien, à temps de corrélation infiniment court, et avec des corrélations spatiales à longues portées. Ces corrélations induisent un effet mémoire, qui influence substantiellement les trajectoires des particules lagrangiennes transportées par le fluide. En particuliers,

elles entraînent l'apparition de lois de conservations non-triviales, qui dépendent du nombre de particules mises en jeu. Prenons par exemple le cas de deux particules, et considérons leur distance  $R$ . Dans le cas d'un champ de vitesse régulier ( $\zeta = 2$ ) d-dimensionnel, on trouve que bien que  $\langle R \rangle$  croisse exponentiellement avec le temps, la quantité  $\langle R^{-d} \rangle$ , elle, tend asymptotiquement vers une constante. Pour des quantités physiques impliquant un nombre plus important de particules, on pourra de même trouver d'autres constantes du mouvements, qui ne pourront pas s'exprimer uniquement en fonction des constantes associées à deux particules. Considérons maintenant un champ (par exemple une tâche de colorant  $\theta$ ) transporté passivement dans cet écoulement, et essayons de calculer le moment  $\langle \theta^{2n}(t) \rangle$ . On s'aperçoit alors que l'on doit pour cela suivre les trajectoires de  $2n$  particules. Si ces particules étaient indépendantes, on pourrait alors factoriser le problème en  $n$  sous-problèmes à deux particules, d'où la loi hiérarchiques  $\langle \theta^{2n}(t) \rangle \sim \langle \theta^2 \rangle^n$ . A cause des corrélations spatiales, on est plutôt obligé de considérer les  $2n$  particules dans leur ensemble. On trouve alors que le comportement de  $\langle \theta^{2n}(t) \rangle$  est déterminé par la loi de conservation associée à cet ensemble de particules, et qui n'a pas de raison d'être

simplement reliée à celle n'impliquant que deux particules. On observe alors un phénomène d'intermittence. Le même genre de mécanisme s'applique également au cas d'un vecteur passif. On pense qu'il s'applique au champs de vitesse lui-même, mais la preuve se fait encore désirer.

#### VERS UN MODELE NUMERIQUE ?

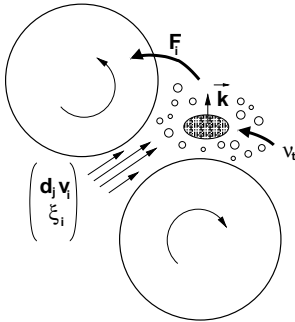
Cette petite digression nous a appris une chose : si l'on veut être capable de simuler un jour les pluies diluviennes, les ouragans ou les événements rares de la turbulence, il faut un modèle de Langevin avec une force incluant des corrélations spatiales, voire temporelles. Plusieurs stratégies s'offrent alors à nous. On peut par exemple essayer des formulations empiriques, en essayant de remplacer le bruit homogène et  $\gamma$  temps de corrélation infiniment court du modèle d'Obukhov par des bruits de plus en plus compliqués, avec des corrélations algébriques mimant les lois d'échelle de la turbulence (pour un exemple, voir Mordant et al, 2003). On peut aussi essayer de déduire analytiquement des équations de Navier-Stokes la forme de ce bruit, moyennant quelques approximations (voir par exemple Friedrich, 2003, pour une dérivation aboutissant à l'introduction d'un bruit avec effet mémoire).

## UN MODELE NUMERIQUE LANGEVIN POUR LA TURBULENCE

La méthode que nous allons décrire repose sur la séparation du champ de vitesse en une composante à grande échelle  $V_i$  et une composante à petite échelle  $v_i$ . En pratique, cette décomposition peut se faire en appliquant un filtre au champ de vitesse  $V_i = \bar{u}_i$ ,  $v_i = u_i - \bar{u}_i$ . Une dernière astuce consiste à décomposer le champ de vitesse à petite échelle en paquets d'ondes localisés, via une transformation de Fourier "locale", selon :

$$\hat{v}_i(x, k) = \int h(x - x') e^{ik(x-x')} v_i(x') dx',$$

où  $h$  est une fonction de fenêtrage centrée en 0 et décroissant rapidement à l'infini.



**Figure 1** - Dynamique d'un paquet d'onde, de vecteur d'onde local  $\vec{k}$  dans un écoulement turbulent sous l'action des différentes forces agissant à grande et à petite échelle. Isolons maintenant par la pensée un petit paquet d'onde au sein d'un écoulement turbulent (Figure 1). Ce paquet d'onde est soumis à plusieurs influences, agissant à des échelles différentes. A grande échelle, il subit le joug des grosses structures (tourbillons) via deux effets : i) un effet de transport, analogue à celui d'une bouée dérivant dans le sillage d'un bateau. Cet effet oblige le paquet d'onde à se déplacer selon les lignes de fluide, comme une particule lagrangienne. ii) Un effet de distorsion, lié au cisaillement de vitesse engendré à l'interface de deux gros tourbillons. Cet effet induit des changements du nombre d'onde local du paquet d'onde, proportionnel aux gradients de vitesse locaux à grande échelle. A plus petite échelle, notre paquet d'onde obéit aux interactions accordées avec ses compatriotes de même taille, ou plus petits. Ces interactions sont l'analogue de l'agitation brownienne endurée par une particule dans un gaz, et se traduisent par une friction qui tend à diminuer la vitesse (l'amplitude) du paquet d'onde. Dans le cadre de ce modèle, cette friction prend la forme d'une

viscosité artificielle  $\nu_t$ , et dépend donc de la taille du paquet d'onde via le carré de son nombre d'onde local. En sus de ces influences, le paquet d'onde est aussi assujéti à une force additionnelle, issue de la cascade d'énergie, et qui engendre la création continue de paquets d'onde à petite échelle via des tourbillons à grande échelle. En utilisant les équations du mouvement, on peut montrer que cette force s'exprime principalement par filtrage des non-linéarités à grande échelle, via  $\xi_i = \partial_j (V_j V_i - \bar{V}_i \bar{V}_j)$ . On peut donc calculer dynamiquement cette force, dès lors qu'on connaît l'évolution des grandes échelles. Cette dernière est gouvernée par le principe fondamental de la dynamique, dans lequel on inclut les forces de pression habituelles, plus une contribution provenant de la rétroaction, à grande échelle, des petites échelles sur les grandes échelles via la non-linéarité des équations. Pour un fluide incompressible, par exemple, on peut montrer que cette force s'écrit par filtrage et sommation sur les paquets d'ondes

$$F_i(x) = \int \partial_j \left( \overline{V_j(x) \hat{v}_j(x, k)} + \overline{\hat{v}_i(x, k) V_j(x)} + \overline{\hat{v}_i(x, k) \hat{v}_j(x, -k)} \right) dk.$$

Au final, notre modèle se compose donc de deux équations couplées : une à grande échelle, incluant le terme de rétroaction  $F_i$  ; une à petite échelle, décrivant l'évolution des paquets d'onde et qui prend la forme d'une équation de Langevin généralisée :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= V_i, \\ \dot{k}_i &= -k_j \partial_j V_i, \\ \dot{\hat{v}}_i &= -\nu_t k^2 \hat{v}_i + \hat{v}_j \partial_j \left( 2 \frac{k_i k_m}{k^2} V_m - V_m \right) + \hat{\xi}_i. \end{aligned}$$

Cette équation décrit donc la dynamique d'un paquet d'onde, advecté par l'écoulement à grande échelle, et dont le vecteur d'onde est étiré par le cisaillement local. On y reconnaît une formulation langevinienne, avec une friction due à la viscosité artificielle, et deux forçages non déterministes, l'un multiplicatif (lié aux gradients du champ à grande échelle) et l'autre additif. Dans ce modèle, le forçage est formellement calculé à chaque instant par intégration simultanée de l'équation de la composante grande échelle. Le "bruit" est ainsi calculé à chaque instant.

L'approche que nous avons suivie est plus pragmatique : il s'agit de calculer numériquement et dynamiquement ce bruit au cours d'une simulation numérique. Cela est rendu possible et numériquement efficace à l'aide d'une décomposition du champ de vitesse en une composante grande échelle, et une composante à petite échelle, sous forme de superposition de paquets d'ondes. À partir d'approximations des équations de la dynamique, prenant en compte la prépondérance des interactions dissonantes à petite échelle, on peut alors montrer que les gros tourbillons engendrent un champ de vitesse local qui transporte et déforme ces paquets d'ondes. Les plus petites échelles produisent une friction artificielle qui dissipe ces paquets d'ondes. Cet effet est contrebalancé par la cascade d'énergie, qui permet de refabriquer de nouveaux paquets d'ondes par battement non-linéaire entre deux gros tourbillons. Les paquets d'ondes eux-même rétroagissent sur l'écoulement à grande échelle par couplage non-linéaire, via des interactions dissonantes. Au final ; l'équation décrivant la dynamique des paquets d'onde est une équation de Langevin généralisée, dont le bruit associé est une fonction simple de la composante grande échelle. Son évolution est alors calculée à faible coût numérique en utilisant une équation auxiliaire. Nous référons le lecteur à l'encadré numéro deux pour plus de détails.

Malgré sa complexité de mise en œuvre, qui nécessite l'intégration simultanée de deux équations couplées, cette méthode nous a permis d'obtenir des gains de temps de calcul pouvant aller jusqu'à un facteur 100 à 1000 pour une simulation de turbulence homogène bi-dimensionnelle, grâce essentiellement à un gain sur la taille des pas de temps qu'elle tolère. La figure 3 en montre un exemple dans le cas d'une turbulence bi-dimensionnelle périodique.

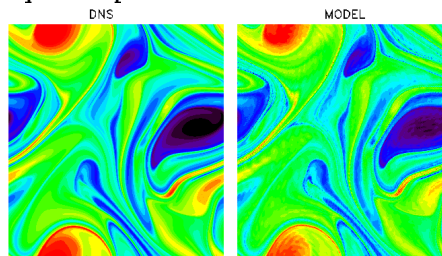


Figure 3 - Exemple de simulation 2D rapide. À gauche, le champ de vorticité vertical  $\omega_z = \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{e}_z$  calculé avec une méthode de simulation directe classique. Cette simulation a nécessité 3 jours de temps de calcul sur une station de travail. À droite, le même champ calculé en utilisant notre méthode Lagrange-Langevin, obtenu en 30 minutes de calcul, sur la même station de travail.

Un deuxième intérêt de notre méthode réside dans sa souplesse d'utilisation, puisque la même méthode peut-être en principe utilisée sans introduction de paramètres ajustables pour des situations plus réalistes, comme de la turbulence magnéto-hydrodynamique, ou stratifiée. Nous travaillons actuellement dans ce sens. Si cela aboutit, ce serait un exemple de système où la

solution est trouvée en admettant notre ignorance partielle de certains degrés de liberté et en la remplaçant par du hasard. Pastichant madame de Sévigné, on pourrait donc conclure en disant que s'il n'est pire folie que de placer son salut dans l'incertitude, dans le cas de la turbulence, cela semble très raisonnable, du moins...prometteur !

#### POUR EN SAVOIR PLUS

G. Falkovich, K. Gawedzki, M. Vergassola, « Reviews of Modern Physics », 73, 2001, 913.

J.-P. Laval, B. Dubrulle, S. Nazarenko, « Physics of Fluids », 13, 2001, 1995.

J.-P. Laval, B. Dubrulle, S. Nazarenko, « Journal of Computational Physics », à paraître, 2004, .

N. Mordant, J. Delour, E. Lévêque, A. Arnéodo, J.-F. Pinton, « Physical Review Letters », 89, 2002, 254502.

R. Friedrich, « Physical Review Letters », 90, 2003, 084501-1.

Baudet (Ch.), « L'interférométrie acoustique : des filets d'ultrasons pour chasser les tourbillons », *Images de la Physique*, 2000.

Castaing (B.), Gagne (Y.), Hopfinger (E.), « Une entropie pour la turbulence », *Images de la Physique*, 1991.

Frisch (U.), « Turbulence », *Cambridge University Press*, 1995.

Lesieur (M.), « Turbulence in Fluids », *Kluwer Academic Publishers*, 1990.

Article proposé par : Bérengère Dubrulle, tél : 01 69 08 72 47, mail [bdubrulle@cea.fr](mailto:bdubrulle@cea.fr), Jean-Philippe Laval, tél : 03 20 33 71 60, mail [Jean-Philippe.Laval@univ-lille1.fr](mailto:Jean-Philippe.Laval@univ-lille1.fr)

Ont également participé à ce travail S. Nazarenko (Univ. Warwick), F. Hersant (Heidelberg), N. Leprovost (CEA).

Certaines idées contenues dans cet article sont le fruit de discussions nombreuses et passionnantes avec Bernard Castaing qui fut le premier à nous révéler l'intérêt de la description Langevin de la turbulence. Ces idées se sont également enrichies et complétées au contact de nombreux collègues (parmi lesquels U. Frisch, R. Friedrich, J. Peinke, Ph. Marcq, A. Naert). Nous remercions finalement nos collègues du GIT pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée dans le mûrissement de ces idées.