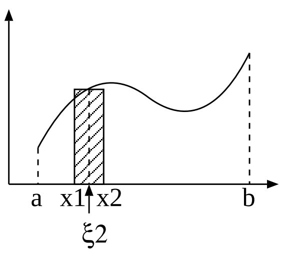
Chapitre 2

Intégrale de Lebesgue

2.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

Soit f bornée sur un intervalle $[a,b]$ fini de $\mathbb{R}$, et soit $x_1,...,x_n$ un ensemble fini de points de $[a,b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n < b = x_{n+1}$. On considère alors un ensemble de ζ_k, $k = 1,...,n+1$ tel que pour tout $k \in [1,n+1]$, on ait

$$x_{k-1} < \zeta_k < x_k$$



On peut donc définir une somme S_n telle que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Définition :

Si, quand $n \to \infty$ de manière à ce que $|x_k - x_{k-1}| \to 0$ pour tout k de $[1,n]$, la somme S_n tend vers une limite indépendante du choix des x_k et des ζ_k, alors cette limite est appelée intégrale de f au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$ et est notée :
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

2.2 Notion de mesure (mesure de Lebesgue)

Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}$, et soit $(I_j)_{j \in J}$ un recouvrement de E par un ensemble fini ou infini dénombrable d'intervalles ouverts de E.

Rappels

- *E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}$ lui-même).*
  Exemple : les rationnels de $[0,1]$ forment un ensemble dénombrable (on peut les dénombrer en considérant la suite : $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},...$).
  L'ensemble des irrationnels de $[0,1]$ est indénombrable.
- *soit $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E si tout point de E appartient à au moins un élément de $\mathcal{F}$.*

Définition : Mesure extérieure de E

On appelle mesure extérieure de E la quantité $\mathcal{M}_{ext}(E) = \inf_{(I_j)_{j\in J}} \sum_{j\in J} l(I_j)$ avec $l(I_j)$ la longueur de l'intervalle I_j.

Remarque

1. $\mathcal{M}_{ext}(\varnothing) = 0$.
2. $\mathcal{M}_{ext}(E) \geqslant 0$.
3. Si $A \subset B$, alors $\mathcal{M}_{ext}(A) \leqslant \mathcal{M}_{ext}(B)$.
4. $\mathcal{M}_{ext}(E)$ peut être finie ou infinie.

Définition : Mesure intérieure de E

Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}$ tel que sa mesure extérieure soit finie. Soit $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de toutes les parties fermées de E. On appelle mesure intérieure de E,

$$\mathcal{M}_{int}(E) = \sup_{K\subset\mathcal{F}(E)} \mathcal{M}_{ext}(K)$$

Remarque

On a toujours $\mathcal{M}_{int}(E) \leqslant \mathcal{M}_{ext}(E)$.

Définition : Notion d'espace mesurable

Si $\mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$, on dit que E est mesurable au sens de Lebesgue.
On pose alors $\mu(E) = \mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$.

Définition : Mesurabilité d'un ensemble de mesure extérieure infinie

Soit E un sous espace de la droite réelle, de mesure extérieure infinie. On dit que E est mesurable au sens de Lebesgue si E est l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables au sens de Lebesgue et de mesure extérieure finie, deux à deux disjoints. Alors, on dit que la mesure de E est infinie, $\mu(E) = +\infty$.

Remarque

Soit A et B deux ensembles disjoints et mesurables, on a
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Proposition

Tout intervalle borné est mesurable. De plus, si $b > a$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors :

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = b - a$$

Proposition

Tout ensemble dénombrable de points est de mesure nulle.

Démonstration

– Si E est fini, alors on peut écrire $E = \{x_1,...,x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ fini.
Soit $\varepsilon > 0$. On définit la suite d'intervalles $I_j(\varepsilon) =]x_j - \frac{\varepsilon}{2n}, x_j + \frac{\varepsilon}{2n}[$, $j = 1...n$. L'ensemble des $I_j(\varepsilon)$ forme un recouvrement de E et :

$$\mathcal{M}_{ext}(E) = \sum_{j=1}^{n} l(I_j(\varepsilon)) = \varepsilon$$

On a donc $\mathcal{M}_{ext}(E) = 0$ et par suite $\mu(E) = 0$.

– Si E est un ensemble infini dénombrable, alors il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que la mesure de $\mathbb{N}$ est nulle.
  Pour $\varepsilon > 0$ on recouvre E par l'ensemble infini dénombrable d'intervalles ouverts $I_j(\varepsilon) =]j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}[$. On se ramène a la somme d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc convergente :

$$\sum_{j=1}^{N} l(I_j(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

  On a donc $\mathcal{M}_{ext}(E) = \mathcal{M}_{ext}(\mathbb{N}) = 0$ et par suite $\mu(E) = \mu(\mathbb{N}) = 0$.

Remarque
La réciproque est fausse : il existe des sous ensembles de $\mathbb{R}$ indénombrables mais de mesure nulle (par exemple l'ensemble triadique de Cantor).

Exemples
1. $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. On a $\mu(E) = 0$ car c'est un ensemble dénombrable.
2. $E' = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. On a $\mu(E') = 1$ car $E \cup E' = [O,1]$ et que E et E' sont disjoints.

Définition :

Une propriété est dite vraie presque partout si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle.

Exemple
La fonction caractéristique des irrationnels inclus dans [0,1] (ou fonction de Dirichlet) est égale à 1 presque partout sur [0,1].

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \big(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\big) \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

2.3 Fonctions Lebesgue-mesurables

Soit f une fonction définie sur un sous-espace E de $\mathbb{R}$ mesurable.

Définition :

La fonction f est dite Lebesgue-mesurable si, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) < a\}$ est un ensemble mesurable.

2.4 Fonctions étagées

Soit E un sous-espace mesurable de $\mathbb{R}$. On notera χ_E la fonction caractéristique de E, c'est à dire la fonction qui prend la valeur 1 sur tout élément de E et 0 sinon.

Définition :

On appelle fonction étagée toute fonction de la forme : $\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{E_i}(x)}$, avec :

- $n \in \mathbb{N} \quad (n < \infty)$
- les y_i des réels
- les E_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints.

Remarque

– f ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes.
– Si les E_i sont des intervalles alors f est dite en escalier.

Exemples

– $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
– la fonction de Dirichlet est réelle étagée.

2.5 Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive

Définition :

Soit f une fonction étagée positive (i.e. $y_i \in \mathbb{R}_+$). On appelle intégrale de Lebesgue le nombre :

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(E_i)$$

avec les précisions suivantes :
- si $y_i = 0$ et si la mesure de E_i est infinie, alors $y_i\, \mu(E_i) = 0$,
- $\displaystyle\int f\, d\mu \geqslant 0$ (mais peut être infinie).

Proposition

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive étagée est finie si et seulement si $\mu\big(\{x/f(x) \neq 0\}\big)$ *est finie.*

Définition :

Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, on définit l'intégrale de f sur A :

$$\int_A f\, d\mu = \int f\, \chi_A\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(E_i \cap A)$$

Exemple

On considère f_D la fonction de Dirichlet. On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_D(x) = 0\, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} + 1\, \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}$$

Si on prend $A = [0,1]$ alors :

$$\int_A f_D\, d\mu = 0\, \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1] \cap A) + 1\, \mu((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,1] \cap A)$$

d'où

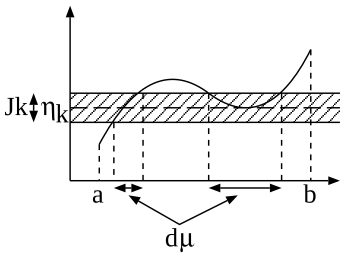
$$\int_A f_D\, d\mu = 1$$

2.6 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive

Soit f une fonction Lebesgue-mesurable positive, on définit $\Sigma(f)$ l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures ou égales à f.

Définition :

On appelle intégrale de Lebesgue de f le nombre, éventuellement infini, tel que : $\boxed{\int f\,d\mu = \sup_{e\in\Sigma(f)} \int e\,d\mu}$



Définition :

La fonction est dite sommable au sens de Lebesgue si $\int f\,d\mu$ est finie.

2.7 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle

Soit f une fonction à valeurs réelles. On peut définir deux fonctions auxiliaires f^+ etf^- par :

$$
\begin{aligned}
f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
f^-(x) &= \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

On a alors $f = f^+ - f^-$.

Définition :

Une fonction à valeurs réelles f est sommable si et seulement si les deux fonctions f^+ et f^- sont sommables, et on pose alors :

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$$

Remarques

- si $\int f^+\,d\mu = +\infty$ et $\int f^-\,d\mu = +\infty$ alors $\int f\,d\mu$ n'existe pas.
- si $\int f^+\,d\mu = +\infty$ (resp. f^-) et $\int f^-\,d\mu$ est finie (resp. f^+) alors $\int f\,d\mu = +\infty$ (resp. $-\infty$).
- $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$

2.8 Intégrale de Lebesgue d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

D'après ce qui a été écrit précédemment, parler de l'intégrale de Lebesgue de la partie réelle de f et de la partie imaginaire de f a un sens, puisque ces deux fonctions sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où $Re(f)$ et $Im(f)$ sont sommables, on définit l'intégrale de f comme :

$$\int f\,d\mu = \int Re(f)\,d\mu + i\int Im(f)\,d\mu$$

2.9 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Proposition

1. *L'ensemble des fonctions sommables sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{L}^1(A)$, est un espace fonctionnel (i.e. un espace vectoriel dont les vecteurs sont de fonctions).*
   L'intégrale de Lebesgue est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{L}^1(A)$.
2. *Si E est un sous-espace de mesure nulle, alors l'intégrale d'une fonction f sur E est nulle.*
3. *Si f est nulle presque partout sur A, alors l'intégrale de f sur A est nulle.*
4. *Si deux fonctions sont presque partout égales sur un sous-espace A, alors leurs intégrales sont égales sur A.*
   On raisonne donc parmi des classes d'équivalence de fonctions presque partout égales sur un espace donné, et $L^1(A)$ est l'espace vectoriel formé de ces classes.
5. *Soit f une fonction mesurable positive sur A.*
   Si son intégrale est nulle sur A, alors la fonction f est nulle presque partout sur A.
6. *Soit f et g deux fonctions sommables, telles que $f \geqslant g$ presque partout sur A, alors*
$$\int_A f\,d\mu \geqslant \int_A g\,d\mu$$
7. *Si f est sommable sur $A \subset \mathbb{R}$, alors f est presque partout finie sur A.*
8. *Une fonction est sommable sur A si et seulement si son module est sommable sur A.*
9. *Si f est sommable sur A, alors on a :*
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A |f|\,d\mu$$
10. *Si g est positive et sommable sur A, et si $|f| \leqslant g$ presque partout sur A, alors f est sommable sur A et*
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A g\,d\mu$$

2.10 Lien Riemann-Lebesgue

Considérons tout d'abord l'intégrale de Riemann au sens strict (on verra plus bas le cas des intégrales impropres).

Proposition

Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle borné $[a,b]$ (avec $b > a$). Si f est intégrable au sens de Riemann (pour cela il faut et il suffit que f soit presque partout continue), alors f est sommable et son intégrale de Lebesgue est égale à son intégrale de Riemann :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{Riemann}}$$

Proposition (changement de variable)

Si f est continue sur $[a,b]$ et si φ est monotone, continuement dérivable sur un domaine de définition dont l'image contient $[a,b]$ alors :

$$\boxed{\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\varphi^{(-1)}([a,b])} f\big(\varphi(t)\big)\, |\varphi'(t)|\, d\mu(t)}$$

Considérons maintenant les cas des intégrales impropres. On va étudier le cas d'une fonction bornée sur un intervalle infini (le cas d'une fonction non bornée sur un intervalle fini se traite de la même façon).

Proposition

Soit $f(x)$ une fonction continue sur tout intervalle fermé borné $[a,A]$ (avec a donné, et $A > a$).

1. *Si l'intégrale impropre de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente, alors la fonction $f(x)$ est sommable au sens de Lebesgue sur le sous-ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\}$ et on a :*

$$\underbrace{\int_E f(x)\, d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\, dx}_{\text{Riemann}}$$

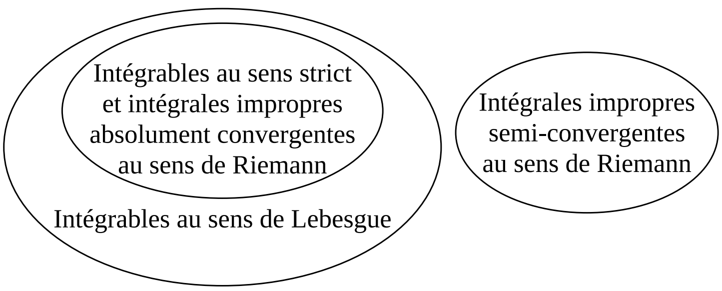
2. *Si l'intégrale impropre de Riemann $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ n'est que semi-convergente, alors la fonction $f(x)$ n'est pas sommable sur E.*

Exemple

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas absolument convergente au sens de Riemann :

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx &= \frac{\pi}{2} \\
\lim_{A\to\infty} \int_0^A \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= +\infty
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est donc pas sommable sur $\mathbb{R}_+$ au sens de Lebesgue.



2.11 Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit A un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $f_1(x)$,$f_2(x)$,...,$f_n(x)$,... une suite de fonctions convergeant presque partout sur A vers une fonction $f(x)$. S'il existe une fonction $g(x) \geqslant 0$, sommable sur A, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x)| \leqslant g(x)$$

pour presque tout $x \in A$, alors la fonction f est sommable sur A et on a :

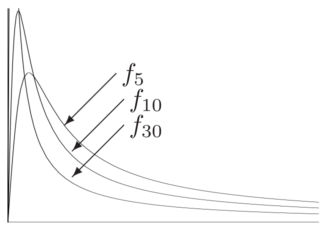
$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu(x)$$

Exemple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur [0,1] par :

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$$

La suite (f_n) converge vers 0 de façon non uniforme :



L'intégration selon Riemann ne permet pas de conclure.

On a :

$$\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$$

(pour obtenir ce résultat il faut dériver par rapport à n et trouver le maximum)

La fonction majorante est sommable selon Lebesgue (intégrale impropre selon Riemann qui converge absolument), et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = 0$$

2.12 Fonctions définies par des intégrales

Soit $f(x,t)$ une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ définie sur le produit cartésien $A \times I$ où A est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons la fonction de I dans $\mathbb{C}$ définie par une intégrale :

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\, d\mu(x)$$

Les théorèmes suivants concernent la continuité et la dérivabilité de la fonction ainsi définie.

Théorème de continuité

Si la fonction $f(x,t)$ est telle que

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable*
2. *pour presque tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue au point t_0*
3. *il existe une fonction $g(x) \geqslant 0$, sommable sur A, telle que :*

$$|f(x,t)| \leqslant g(x)$$

pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in A$

alors la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est sommable sur A et la fonction

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\, d\mu(x)$$

est continue au point t_0, i.e. :

$$\lim_{t\to t_0} \int_A f(x,t)\, d\mu(x) = \int_A f(x,t_0)\, d\mu(x)$$

Théorème de dérivabilité

Si la fonction $f(x,t)$ est telle que

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est sommable sur A*
2. *pour presque tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]a,b[$*
3. *il existe une fonction $g(x) \geqslant 0$, sommable sur A, telle que :*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leqslant g(x)$$

pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in A$

alors la fonction

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\, d\mu(x)$$

est dérivable sur I.
En outre, pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ est sommable sur A et on a :

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\, d\mu(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)$$

(dérivation sous le signe somme)

2.13 Espaces fonctionnels L^1 et L^2

Rappel

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout sur } A$$

Alors : $L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)/\mathcal{R}$
où $\mathcal{L}^1(A)$ est l'ensemble des fonctions définies sur A et à valeur dans $\mathbb{C}$ sommables.

On appelle donc $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ sommables, *i.e. :*

$$\int |f(x)|\; d\mu(x) < \infty$$

deux fonctions égales presque partout sur $\mathbb{R}$ étant considérées comme identiques.

Définition :

On appelle $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le carré du module est sommable, i.e. :

$$\int |f(x)|^2\; d\mu(x) < \infty$$

On définit alors $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{R}$ (deux fonctions égales presque partout sur $\mathbb{R}$ sont considérées comme identiques pour $L^2(\mathbb{R})$).

Remarque

Il n'existe pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Par exemple :

$$\begin{aligned} x \longmapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} &\in L^1(\mathbb{R}), \ \notin L^2(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &\in L^2(\mathbb{R}), \ \notin L^1(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto e^{-x^2} &\in L^1(\mathbb{R}), \ \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Proposition

Les espaces fonctionnels $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels (sur le corps des complexes) de dimension infinie.

On peut munir $L^1(\mathbb{R})$ de la norme suivante :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \longmapsto \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int |f(x)|\, d\mu(x)$$

De même, on peut munir $L^2(\mathbb{R})$ de la norme suivante :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\int |f(x)|^2\, d\mu(x)}$$

Théorème de Fisher-Riesz

Les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ munis de leurs normes sont des espaces de Banach (i.e. des espaces vectoriels normés complets).

Remarque

La norme définie sur $L^2(\mathbb{R})$ dérive d'un produit scalaire :

$$< f,g >= \int_A \bar{f}\, g\, d\mu$$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ forme ainsi un espace de Hilbert.

2.14 Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$

Soient A et B deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$. Soit $f(x,y)$ une fonction mesurable définie sur le produit cartésien $A \times B$. Si elle existe, l'intégrale de Lebesgue de f sur $A \times B$ sera notée :

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

(pour la construction de l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$, voir par exemple N. Boccara, *Intégration*, Eyrolles 1995 ; cette construction requiert la définition d'une mesure de Lebesgue pour un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$).

La fonction f est dite sommable sur $A \times B$ si :

$$\left| \int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right| < \infty$$

On montre que f est sommable si et seulement si son module $|f|$ est sommable et on a alors :

$$\left| \int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right| < \int_{A\times B} |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

Théorème de Fubini

Si $f(x,y)$ est sommable sur $A \times B$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) &= \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \end{aligned}$$

Remarques

1. L'énoncé du théorème de Fubini renferme l'affirmation que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_B f(x,y)\, d\mu(y)$ (resp. $y \mapsto \int_A f(x,y)\, d\mu(x)$) est définie pour presque tout $x \in A$ (resp. $y \in B$).
2. Si $f(x,y)$ n'est pas sommable, il peut arriver que l'une des deux expressions
$$\int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$
ait un sens sans que l'autre en ait un. Il peut même arriver que chacune ait un sens mais que les valeurs soient distinctes.
3. Il suffit que l'une des deux expressions
$$\int_A \left(\int_B |f(x,y)|\, d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left(\int_A |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$
soit finie pour que la fonction $f(x,y)$ soit sommable sur $A \times B$.
4. Soit $f(x,y)$ une fonction de la forme
$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$$
(produit de fonctions dépendant d'une seule variable et dont aucune n'est presque partout nulle). Pour que f soit sommable il faut et il suffit que chacune des fonctions f_i $(i = 1,2)$ soit sommable. On a alors :
$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \left(\int_A f_1(x)\, d\mu(x) \right) \left(\int_B f_2(y)\, d\mu(y) \right)$$

Exemple

$A = B = [0,1]$
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$
Pour $f(0,0)$ on peut prendre n'importe quelle valeur car c'est un point de mesure nulle qui n'intervient pas dans l'intégrale.
$$\begin{aligned} \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) &= \frac{\pi}{4} \\ \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
La fonction f n'est donc pas sommable sur $[0,1] \times [0,1]$.